<u>10- дәріс</u>

Тақырып: Максвелдің теңдеулері

Дәріс мазмұны: 1. Максвелдің бірінші теңдеуі. 2. Максвелдің екінші теңдеуі. 3. Максвелл теңдеулерінің толық жүйесі. 4. Энергия ағынының тығыздығы. Умов-Пойнтинг векторы

1. Максвелдің бірінші теңдеуі

Фарадей ашқан электромагниттік индукцияның негізгі заңы бойынша ЭҚК:

$$\varepsilon = -\frac{d\hat{O}_m}{dt}, \qquad (10.1)$$

мұндағы Φ_m – магнит индукциясының ағыны. Ол өз кезінде төмендегідей формула бойынша анықталады:

$$\hat{O}_m = \int B_n dS, \qquad (10.2)$$

мұндағы S – тұйық контурдың ауданы; B_n – магнит индукциясы векторы B-ның ауданға нормаль $\vec{n}$-ге проекциясы. Тұрақты ток бөлімінде келтірілген анықтама бойынша тұйық контурдағы ЭҚК:

$$\varepsilon = \oint \vec{E}_\ell \cdot d\vec{\ell}, \qquad (10.3)$$

мұндағы E_ℓ – электр өрісі кернеулік векторының $\vec{E}$ контур элементі $d\vec{\ell}$ бағытына проекциясы. Келтірілген (10.1) және (10.3) теңдеулердің оң жақтарын өзара теңестіретін болсақ, онда (3.2) ескере отырып алатынымыз:

$$\oint \mathrm{E}_\ell \cdot d\ell = -\frac{\partial \hat{O}_m}{\partial t} = -\int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} dS. \qquad (10.4)$$

$\dfrac{\partial \Phi_m}{\partial t}$ – дербес туынды магнит индукциясының ағынының тек уақытқа тәуелділігін көрсетеді.

Алынған (10.4) соңғы теңдеуден магнит өрісінің өзгерісі, айнымалы электр өрісінің пайда болуының себепшісі екені байқалады. Кернеулік векторының циркуляциясы нөлден өзгеше, демек бұл магнит өрісі қоздырған электр өрісі, потенциалды өріс емес, құйынды өріс екендігін дәлелдейді. Құйынды өрістің күш сызықтары тұйық және олардың кеңістікте өткізгіштің бар-жоғына байланыссыз-ақ пайда болатындығын көрсетеді. Аталған (10.4) теңдігінің негізінде Максвелл осындай қортындыға келді. Сондықтан (10.4) өрнегі *Максвелдің интегралдық түрдегі бірінші теңдеуі* деп аталады.

2. Максвелдің екінші теңдеуі

(3.4) өрнегін және де көптеген тәжірибе көрсеткіштерін талдай отырып, Максвелл кері құбылыстың болуы ықтимал деген қорытындыға келді. Яғни, оның болжауынша, айнымалы электр өрісінің күш сызықтары тұйықталған магнит өрісін туғызуға тиіс. Максвелдің бұл болжамының дұрыстығына төмендегідей тәжірибе арқылы көз жеткізуге болады. Құрамында конденсаторы бар айнымалы ток тізбегін қарастырайық. Тығыздығы j өткізгіштік ток тізбек бөліктерінде магнит өрісін туғызады. Бұл тізбекте қозғалыстағы зарядтардан пайда болған өткізгіштік ток жалғаушы сымдардан жүреді де конденсатордың астарындағы саңылауда (аралықта) ток болмайды. Бірақ, бұл уақыт мезеттерінде конденсатор зарядталып және разрядталып тұрғандықтан астарладың арасында айнымалы электр өрісі болады. Бұл өріс әрбір уақыт мезеттерінде өткізгіштердегі ток өткендегідей, әрі оған тең ток өткендей магнит өрісін тудырады. Айнымалы электр өрісі мен одан пайда болған магнит өрісінің арасындағы өзара мөлшерлік байланысты анықтау үшін Максвелл ығысу тогы деген ұғым енгізді. Токтар сияқты кеңістікте магнит өрісін тудырғандықтан айнымалы электр өрісін Максвелл ығысу тогы деп атады. Ал өткізгіштік тогы мен ығысу тогы тең болуы керек, яғни $I_{өт}=I_{ығ}$, онда олардың тығыздықтары да өзара тең болады деп алуымыз керек $j_{өт}=j_{ығ}$.

Конденсатордың астарына жақын жердегі өткізгіштік токтың тығыздығы

$$j_{өт}=\frac{I}{S}, \qquad \frac{1}{S}\frac{dq}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{q}{S}\right)=\frac{d\sigma}{dt}, \tag{10.5}$$

мұндағы σ – зарядтың беттік тығыздығы, S – конденсатор астарларының ауданы. Олай болса

$$j_{өт}=\frac{d\sigma}{dt}.$$

Электр өрісін электр ығысу $\vec{D}$ векторымен сипаттауға болады. Электростатикадан конденсатордың астарындағы зарядтың беттік тығыздығы σ электр ығысуымен D байланысты екені белгілі:

$$D=\sigma$$

осыны ескерсек, онда ығысу тогының тығыздығы

$$j_{ығ}=\frac{\partial D}{\partial t}. \tag{10.6}$$

Дербес туынды белгісі, магнит өрісі тек электр ығысуының уақыт бойынша өзгеру жылдамдығымен анықталатынын көрсетеді. Мұндағы $\vec{j}_{ығ}$ және $\vec{j}_{өт}$ векторларының бағыттары әрқашан $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ векторымен бағыттас болатынын көрсетуге болады, сондықтан (3.6) теңдігін векторлық түрде жазуға болады:

$$\vec{j}_{ығ}=\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \tag{10.7}$$

Өткізгіштік және ығысу токтарын сәйкесінше былай көрсетейік

$$I_{өт}=j_{өт}\,dS \quad \text{және} \quad I_{ығ}=j_{ығ}\,dS.$$

Магнит өрістерін есептегенде толық токты алу қажет

$$I = I_{өт} + I_{ығ} = (j_{өт} + j_{ығ})dS = (j_{өт} + \frac{\partial D}{\partial t})dS \qquad (10.8)$$

енді

$$DdS = d\Phi_{ығ}$$

екенін ескеріп, мұндағы $d\Phi_{ығ}$ – электрлік ығысу $\vec{D}$ векторының dS бет арқылы өтетін элементар ағыны, онда:

$$I_{ығ} = \frac{d\Phi_{ығ}}{dt}. \qquad (10.9)$$

Ығысу тогы және толық ток түсінігі айнымалы ток тізбегінің әрқашанда тұйық екендігін айқындайды: өткізгішітік ток өткізгіштің ұштарында үзіліп қалады, ал диэлектриктерде және вакуумда өткізгіштердің ұштарын ығысу тогы өткізгіштік тогын жалғайды. Егер толық токты мына түрде жазсақ:

$$I = I_{өт} + I_{ығ} = \int_S (j_{өт} + j_{ығ})dS, \qquad (10.10)$$

онда магнит өрісі кернеулігінің циркуляциясы туралы теореманы былай жазамыз:

$$\oint_L H_\ell \cdot d\ell = I_{өт} + I_{ығ} = I_{өт} + \frac{\partial \hat{O}_m}{\partial t} \qquad (10.11)$$

немесе өткізгіштік тогының және ығысу тоғының тығыздығы арқылы векторлық түрде төмендегідей көрсетуге болады:

$$\oint_L \vec{H}_\ell \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\vec{j}_{өт} + \vec{j}_{ығ})d\vec{S}. \qquad (10.10)$$

Бұл Максвелдің екінші теңдеуі электр өрісінің қандай өзгерісі болмасын, ол құйынды магнит өрісін тудыратынын тағайындайды. Өткізгіштік тогы жоқ болғанда немесе бұл токты ескермеуге болатын кезде (мысалға кондесатордың астарларының арасында) толық ток заңын былай жазуға болады

$$\oint_L H_\ell \cdot d\ell = j_{ығ}\ dS = \frac{\partial \hat{O}_m}{\partial t}.$$

3. Максвелл теңдеулерінің толық жүйесі

Максвелл электр және магнит өрістерінің біріккен теориясын жасап сол кездегі тәжірибеден алынған құбылыстарды ғана түсіндіріп қоймай алдын ала жаңа пікірлерді де яғни, электромагниттік толқындардың бар екенін айтты. Максвелл жарықтың электромагниттік теориясын жасады. Максвелдің бірінші тендеуі электр өрісінің көзі тек қана зарядтар ғана емес айнымалы магнит өрісі де электр өрісінің көзі бола алатынын нақтылайды. Оның математикалық өрнегінің түрі:

$$\oint E_\ell d\ell = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} = -\frac{\partial \hat{O}_m}{\partial t}. \qquad (10.13)$$

Максвелдің екінші теңдеуі $\vec{H}$ векторының циркуляциясы туралы теореманы жалпылау. Бұл теңдеу магнит өрісін электр тогы (қозғалыстағы зарядтар) не айнымалы электр өрісі (ығысу тогы) тудыратынын көрсетеді, яғни

$$\oint_L H_L \cdot d\ell = I_{\mu ò} + \frac{\partial \hat{O}_m}{\partial t} = \int_S \left(\vec{j}_{\mu ò} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S} \ . \qquad (10.14)$$

Максвелдің үшінші теңдеуі – Гаусс теоремасының жалпыламасы

$$\oint D_n dS = \sum_{i=1}^{n} q_i \ . \qquad (10.15)$$

Бұл теңдеу электрлік ығысу векторының $\vec{D}$ сызықтары зарядтардан басталып зарядтарда аяқталатынын ерекше айқын көрсетеді. Максвелдің төртінші теңдеуі:

$$\oint B_n dS = 0 \, . \qquad (10.16)$$

Бұл теңдеу магнит индукция векторының $\vec{B}$ күш сызықтарының тұйық екенін және магнит зарядтарының жоқ екенін нақтылайды. Электромагниттік өрістерді (санағанда) есептегенде жоғарыда айтылған теңдеулерге мына $\vec{D}$ және $\vec{E}$, $\vec{B}$ және $\vec{H}$ шамалардың арасындағы байланыстарды пайдалану керек

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} \, , \qquad (10.17)$$

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H} \qquad (10.18)$$

және Ом заңының өткізгіштік тогының тығыздығы үшін өрнегін де пайдалану керек

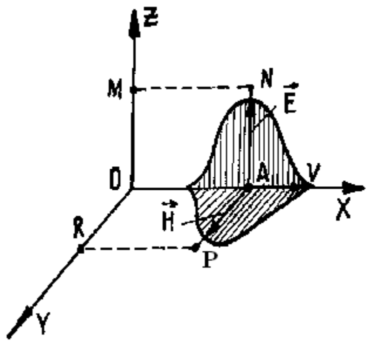
$$\vec{j}_{\mu ò ê} = \gamma \vec{E} \, , \qquad (10.19)$$

мұндағы ε_0 мен μ_0 – электр және магнит тұрақтылары, ε мен μ – диэлектрлік және магнит өтімділіктері, γ – зарядтардың меншікті электр өткізгіштігі.

4. Энергия ағынының тығыздығы. Умов-Пойнтинг векторы

Максвелл теориясынан мынадай тұжырым жасауға болады: уақыт бойынша айнымалы электр өрісі құйынды магнит өрісін тұдырса, айнымалы магнит өрісі құйынды электр өрісін тудырады. Бұл екі өріс өзара тығыз байланысты, сондықтан бұл құбылыс электрмагниттік өріс деп аталады. Электрмагниттік өріс кеңістіктің белгілі бір жерінде өзгермей тұра алмайды. Кеңістіктің қандайда бір нүктесінде қоздырылған айнымалы электр өрісі айнымалы магнит өрісін тұдырса, өз кезегінде айнымалы магнит өрісі айнымалы электр өрісін қоздырады. Олай болса, бүл құбылыс қайталанып отыратындықтан, кеңістікте электр және магнит өрістерінің кезектескен түрленуі, оның бір нүктесінен келесі бір нүктесіне тарайды. Бұл құбылыс кеңістікте уақыт бойынша периодты өтеді, өрістердің кеңістікте таралуын электрмагниттік толқын деп атаймыз. Электрмагниттік толқынның пайда болуы және қасиеттері Максвелл теңдеулері арқылы анықталады.

Электрмагниттік толқын ашық тербеліс контурында пайда болады, оның қозуы үшін кез келген электр өткізгіш арқылы айнымалы ток өтсе де жеткілікті. Координаттар осінің бас нүктесінде орналасқан өткізгіштен төмен бағытталған айнымалы ток өткенде, онда пайда болған электрмагниттік ұйытқу суретте көрсетілген. Мұндағы $\vec{H}$ магнит өрісінің кернеулігі, ал E электр өрісінің кернеулігі. Қозғалмайтын OANM және OAPR контурларын қарастырайық. Олар үшін Максвелл теңдеулерінің түрлері төмендегідей болар еді:



10.1-сурет. Электрмагниттік толқынның таралуы.

$$\oint_{OANM}\left(\vec{E}\,d\,\vec{\ell}\right) = -\frac{\partial \hat{O}_m}{\partial t},$$
$$\oint_{OAPR}\left(\vec{H}\,d\,\vec{\ell}\right) = -\frac{\partial \hat{O}_e}{\partial t}. \qquad (10.20)$$

Контурлар жақтарының ұзындығын AN=AP= l деп алайық. Осы контур бойында E_i мен H_i нөлге тең емес болғандықтан, (3.20) теңдеулері былай түрленеді:

$$E \cdot d\ell = -\frac{\partial \hat{O}_m}{\partial t},$$
$$-H \cdot d\ell = \frac{\partial \hat{O}_e}{\partial t}. \qquad (10.21)$$

Егер қарастырылып отырған электромагниттік ұйытқудың таралу жылдамдығы v болса, онда ол dt уақыт аралығында dx=vdt қашықтыққа жылжиды. Онда алынған контурлар арқылы өтетін магнит және электр өрістерінің ағыны Φ_m мен Φ_e біршама кемиді:

$$d\Phi_m = -B\ell \cdot vdt \text{ және } d\Phi_e = -D\ell \cdot vdt.$$

Сондықтан $\frac{\partial \hat{O}_m}{\partial t} = -\hat{A}\ell\upsilon$ және $\frac{\partial \hat{O}_e}{\partial t} = -D\ell\upsilon$ деп алуға болады, (10.21)-теңдеуінен шығатын қортынды:

$$E = v \cdot B, \quad H = v \cdot D. \qquad (10.22)$$

Жоғарыда келтірілген (3.21) және (3.22) теңдіктерін еске ала отырып, E және H үшін мынадай теңдіктер келіп шығады:

$$E = v\,\mu\mu_0 H, \quad H = v\,\varepsilon\varepsilon_0 E. \qquad (10.23)$$

Бұл екі теңдеуден толқын жылдамдығының

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} \qquad (10.24)$$

болатынын анықтау қиын емес. Электрмагниттік ұйытқудың таралу жылдамдығы нақты сан мәнге ие және ол таралу ортасының қасиеттеріне байланысты. Вакуумде ε=μ=1 екені белгілі. Олай болса, электромагниттік толқынның таралу жылдамдығы v=c:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \, м/с, \qquad (10.25)$$

мұндағы ε_0 мен μ_0 – электр және магнит тұрақтылары.

Электрмагнит толқынның вакуумде таралу жылдамдығы *c*-ны есептеп табу Максвелл теңдеулерінен алынған ең маңызды қортындылардың бірі болып табылады. Бұл жарықтың электромагниттік тегін көрсетеді. Жоғарыда келтірілген (3.23) өрнектегі Максвелдің бірінші және екінші теңдеулерінен алынған формуланы векторлық түрде жазсақ, онда

$$\vec{E} = -\left[\vec{\mathrm{v}} \cdot \vec{H}\right]\mu_0\mu, \qquad \vec{H} = -\left[\vec{\mathrm{v}} \cdot \vec{E}\right]\varepsilon_0\varepsilon. \qquad (10.26)$$

Бұл өрнектегі $\vec{E}, \vec{H}, \vec{\mathrm{v}}$ векторлары оң бұранда жүйесін құрайды. Электрлік және магниттік кернеулік векторлары өзара перпендикуляр және олардың әрқайсысы ұйытқудың таралу жылдамдығына нормаль бағытталған, яғни $\vec{E} \perp \vec{H} \perp \vec{\mathrm{v}}$.

Электрмагниттік өріс кеңістікте тарала отырып, энергия тасымалдайды. Электр өрісі энергиясының тығыздығы

$$w_E = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2,$$

ал магнит өрісінің энергия тығыздығы

$$w_H = \frac{1}{2}\mu\mu_0 H^2$$

формулаларымен анықталады. Онда электромагниттік өріс энергиясының тығыздығы олардың қосындысына тең:

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\mu\mu_0 H^2. \qquad (10.27)$$

Вакуумде таралған электромагниттік толқын үшін Умов-Пойнтинг векторын S деп белгілесек, ол мынадай өрнекпен анықталады:

$$\vec{S} = \left[\vec{E} \cdot \vec{H}\right]. \qquad (10.28)$$

Әдебиеттер:

Нег. 2 [258-273], 8 [261-263, 267-283].
Қос. 22 [263-278], 48 [245-247, 256-259].
Нег. 2 [93-291, 302-315], 7 [333-339], 8 [297-303].
Қос. 49 [247-302].

Бақылау сұрақтары:

1. Ығысу тогы дегеніміз не?

2. Максвелл теңдеулерінің жүйесін жазыңыз?
3. Электромагниттік өріс үшін толқындық теңдеуін жазыңыз?
4. Қума электромагниттік толқындардың интенсивтігі мен Умов-Пойнтинг векторының арасында қандай байланыс бар?