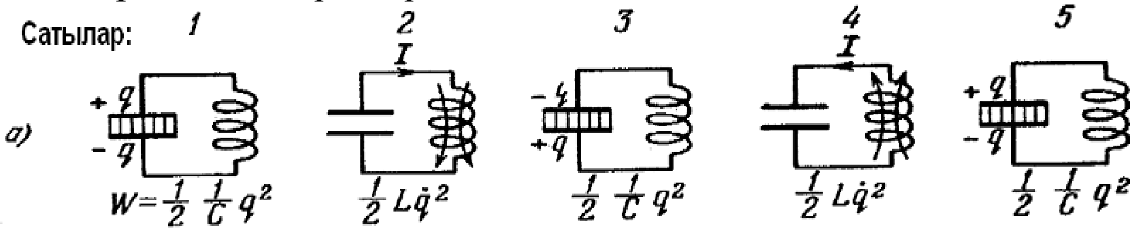
12-дәріс

Тақырып: Тербелмелі контур.

Дәріс мазмұны: 1. Актив кедергісі жоқ контурдағы еркін тербеліс. 2. Еркін өшетін тербелістер. 3. Еріксіз электр тербелістері

1. Актив кедергісі жоқ контурдағы еркін тербеліс

Индуктивтігі мен сыйымдылығы бар тізбекте электр тербелісі пайда бола алады. Мұндай тізбек *тербелмелі контур* деп аталады. 12.1-суретте идеалды актив кедергісіз контурдағы (тербелмелі контурдағы) тербелмелі процестің жүйелі сатылары көрсетілген.



12.1-сурет. Тербелмелі контурдағы тербеліс процесінің жүйелі сатылары.

Конденсатордың астарына бастапқыда қандай да бір заряд беріп немесе катушкада ток тудырып (мысалы катушканың орамдарын қиып өтетін сыртқы магнит өрісін қосу арқылы) контурда электр тербелісін тудыруға болады. Бірінші әдісті пайдаланайық. Катушкадан ажыраған конденсаторды ток көзіне (кернеу көзіне) қосайық. Бұл кезде конденсатордың астарлары әраттас +q және -q зарядтармен зарядталады (12.1-сурет). Астарлардың арасында энергиясы $q^2/2C$ электр өрісі пайда болады. Енді ток көзінен (кернеу көзінен) ажыратып катушкаға қоссақ, конденсатор разрядталады да, контурдан ток жүреді. Бұл кезде катушка арқылы өтетін toктың себебінен электр өрісінің энергиясы азайып, магнит өрісінің энергиясы арта бастайды ($LI^2/2$). Бұл жерде контурда актив кедергі болмағандықтан, электр мен магнит өрістерінен тұратын толық энергия сымдарды қыздыруға шығындалмай, тұрақты болып қалады. Конденсатордағы заряд таусылғанда, яғни конденсатор энергиясы нөл болғанда катушкадағы магнит өрісінің энергиясы мен тізбектегі ток ең үлкен мәніне жетеді (2 саты осы мезеттен бастап ток өздік электр қозғаушы күштің есебінен ағады). Енді процесс кері қарай қайталанады (4 және 5 саты), осыдан кейін жүйе бастапқы күйге келеді (5 саты) және барлық цикл қайтадан басталады. Процесс барысында конденсатор астарларындағы зарядтар, конденсаторлардағы кернеулер және индуктивтілік арқылы өтетін ток периодтты түрде өзгереді (яғни тербеледі). Тербеліс электр және магнит өрістерінің бір-біріне айналуы арқылы өтеді.Тербелмелі контурда *электр зарядтары тербеледі.* Актив кедергісі жоқ контурдағы тербеліс теңдеуінің түрі мынадай (конденсаторды оң токпен зарядтадық деп есептейік):

$$I = \frac{dq}{dt} = \dot{q} \, . \qquad (12.1)$$

Біртекті емес тізбек бөлігі үшін Ом заңының өрнегін жазайық:

$$IR = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12} \, . \qquad (12.2)$$

Берілген жағдай үшін R=0, φ_1-φ_2=-q/C, ε_{12}=ε_S=-L(dl/dt), бұл мәндерді (3.33)-ке қойып, алатынымыз:

$$0 = -q/C – L(dI/dt), \qquad (12.3)$$

ақырында $\frac{dI}{dt}$ -ны $\ddot{q}$ деп белгілеп,

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0 \qquad (12.4)$$

өрнегін аламыз. Егер

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (12.5)$$

деп белгілеп алсақ, онда гармониялық тербеліс теңдеуін аламыз:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \, .$$

Бұл теңдеудің шешімі:

$$q=q_m\cos(\omega t+\alpha). \qquad (12.6)$$

Конденсатордың астарларындағы зарядтар гармониялық заңмен өзгереді, циклдік жиілік (12.5) теңдеумен анықталады. Бұл жиілік контурдың *меншікті циклдік жиілігі* деп аталады. Тербелістің периоды Томсон формуласынан анықталады:

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \, . \qquad (12.7)$$

(12.6) теңдеуін дифференциялдап ток күшінің өрнегін табамыз:

$$I=-\omega_0 q_m\cdot\sin(\omega t+\alpha)=I_m\cdot\cos(\omega t+\alpha+\pi/2). \qquad (12.8)$$

Конденсатордағы кернеу зарядтан 1/C көбейткішке өзгеше

$$U=q_m/C\cdot\cos(\omega t+\alpha)=U_m\cdot\cos(\omega t+\alpha). \qquad (12.9)$$

Бұл жерден байқайтынымыз - конденсатордағы ток кернеуден $\pi/2$ фазаға озып отырады. (12.6) және (12.9) өрнектерін (12.6) формуласымен салыстырсақ, көретініміз - ток ең үлкен мәнге жеткенде заряд пен кернеу нөлге тең болады және керісінше. (12.8) және (12.9) формулалардан $U_m = q_m/C$, $I_m = \omega_0 q_m$ шамаларының амплитудаларының қатынасын алып ω_0-ді (12.15) формуламен ауыстырсақ, алатынымыз:

$$U_m = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m . \qquad (12.10)$$

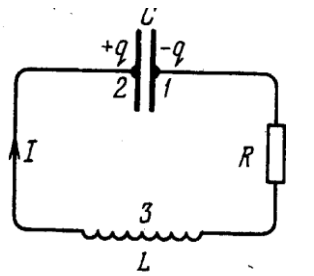
(12.9) формуласын электр өрісінің ең үлкен $\frac{1}{2} C U_m^2$ мәні магнит өрісінің ең үлкен $\frac{1}{2} L I_m^2$ мәніне тең болуы керек деп алуға болады.

2. Еркін өшетін тербелістер

Нақты тербелмелі контурда әрқашанда актив кедергі болады. Контурда жинақталған энергия біртіндеп осы кедергілерде шығындалады, соның есебінен еркін тербеліс өшеді.

1-3-2 тізбек үшін жазылған (12.2) өрнектің түрі (12.2-сурет):

$$IR = -\frac{q}{C} - L\frac{dI}{dt} . \qquad (12.11)$$



12.2-сурет. Нақты тербелмелі контурдың сұлбасы.

Бұл теңдеуді L-ге бөліп, I-ді q-мен алмастырып, $\frac{dq}{dt}$-ны $\dot{q}$-мен белгілеп жазсақ,

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC} q = 0 \qquad (12.12)$$

теңдеуін аламыз. $\beta = R/2L$ белгілеу енгізсек және LC-ға кері шама контурдың меншікті циклдік жиілігінің ω_0 квадраты екенін ескеріп (12.12) өрнегін мынадай түрда жазуға болады:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 . \qquad (12.13)$$

Егер $\beta^2 < \omega_0^2$, яғни $R^2/4\,L^2 < 1/LC$ болса, онда (3.43) теңдеуінің шешімі:

$$q = q_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) \qquad (12.12)$$

болады, мұндағы $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$; ω_0 мен β мәндерін қойсақ:

$$\omega=\sqrt{1/LC-R^2/4L} \qquad (12.15)$$

өрнегін аламыз. Сонымен, өшетін тербелістің циклдік жиілігі контурдың меншікті жиілігінен кіші болады. R=0 болса, онда (12.15) өрнек (12.5) өрнегіне ауысады. (3.45) теңдеуін сыйымдылыққа C бөліп, конденсатордағы кернеуді табамыз:

$$U=\frac{q_m}{C}e^{-\beta t}\cos(\omega t+\alpha)=U_m e^{-\beta t}\cos(\omega t+\alpha) \qquad .(12.16)$$

Ток күшін табу үшін (12.12) өрнегін уақыт бойынша дифференциалдаймыз:

$$I=\dot{q}=q_m\cdot e^{-\beta t}[-\beta\cdot\cos(\omega t+\alpha)-\omega\sin(\omega t+\alpha)].$$

Бұл формуланың оң жағын бірге тең $\omega_0/\sqrt{\omega^2+\beta^2}$ шамаға көбейтсек, алатынымыз:

$$I=\omega_0 q_m\cdot e^{-\beta t}[-\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2+\beta^2}}\cos(\omega t+\alpha)-\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+\beta^2}}\sin(\omega t+\alpha)].$$

Енді

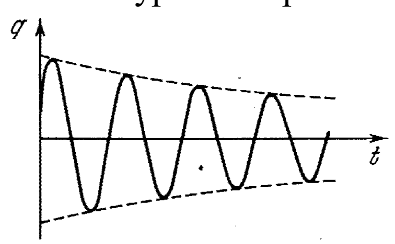
$$\cos\psi=-\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2+\beta^2}}=-\frac{\beta}{\omega_0};$$

$$\sin\psi=\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+\beta^2}}=\frac{\omega}{\omega_0}$$

шарттарымен анықталатын ψ бұрышын енгізіп, ток күшін

$$I=\omega_0 q_m e^{-\beta t}\cos(\omega t+\alpha+\psi) \qquad (12.17)$$

түрінде жаза аламыз. Бұл жерде $\cos\psi<0$, ал $\sin\psi>0$ болғандықтан мәндері $\pi/2$ -ден π -ге дейін аралығында қамтылған. Сондықтан, контурда актив кедергінің болуына байланысты ток күші фаза жағынан кернеуді конденсаторда $\pi/2$-ден үлкен шамаға озып отырады. (12.12) функцияның графигі 12.3-суретте көрсетілген.



12.3-сурет. Зарядтың уақытқа тәуелділік графигі.

Кернеу мен токтың графиктері де осыған ұқсас. Тербелістің өшуін өшудің логарифмдік декрементімен сипаттау қабылданған.

$$\lambda = \ln\frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T\,, \qquad (12.18)$$

мұндағы *a(t)* қандай да бір шаманың амплитудасы (q, U, немесе I). Өшудің логарифмдік декременті амплитуда е есе азаятын уақыт ішіндегі N_e тербеліс санына кері екенін ескертеміз: λ=1/N_e. (12.18) өрнек (β=R/2L) мәнін қойып және Т-ның орнына 2π/ω ауыстырып, λ үшін мына

$$\lambda = 2\pi R/2L\,\omega = \pi R/L\omega \qquad (12.19)$$

өрнегін аламыз. Жиілік ω, демек λ контурдың L,C,R параметрлерімен анықталады. Сонымен, өшудің логарифмдік декременті контурдың сипаттамасы болып табылады.

3. Еріксіз электр тербелістері

Еріксіз тербеліс болуы үшін, сырттан жүйеге периодты түрде әсер ету керек. Ол үшін контурдың элементтеріне тізбектей айнымалы ЭҚК немесе контурды үзіп оған айнымалы

$$U=U_m\cdot\cos\omega t \qquad (12.20)$$

кернеу беру керек. Бұл кернеуді өздік индукцияның ЭҚК -не қосу керек. Нәтижесінде Ом заңы мына

$$IR = -\frac{q}{C} - L\frac{dI}{dt} + U_m\cos\omega t \qquad (12.21)$$

түрге келеді. Мұны түрлендіріп келесі өрнекті аламыз:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L}\cos\omega t\,. \qquad (12.22)$$

Мұндағы ω_0^2 (12.5) өрнегімен, β өшу коэффициенті R/2L өрнегімен анықталады. Бұл теңдеудің дербес шешімінің түрі

$$q = q_m\cdot\cos(\omega t - \psi) \qquad (12.23)$$

болады, мұндағы

$$q_m = \frac{U_m}{\omega\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}, \quad tg\psi = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}\,. \qquad (12.24)$$

Егер дербес (12.23) шешімге біртекті теңдеуге сәйкес жалпы шешімді қосса, онда жалпы шешім болады. Уақыт t бойынша (12.23) өрнекті туындыласақ, контурдағы орныққан тербелістегі ток күшін табамыз:

$$I = -\omega q_m \sin(\omega t - \psi) = I_m \cos(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}),$$

мұндағы $I_m = \omega \cdot q_m$ деп белгіледік. Мұны мына түрде жазайық:

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi) \tag{12.25}$$

мұндағы $\varphi=\psi-\frac{\pi}{2}$ ток пен берілген кернеудің арасындағы фаза ығысуы. (12.24) өрнегіне сәйкес:

$$tg\varphi = tg(\psi - \pi/2) = -\frac{1}{tg\psi} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}. \tag{12.26}$$

Бұл формуладан шығатыны - ток фаза жағынан кернеуден қалып отырады ($\varphi<0$), егер $\omega L>I/\omega C$ болса. (12.26) өрнегімен келіссек, онда:

$$I_m = \omega \cdot q_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}. \tag{12.27}$$

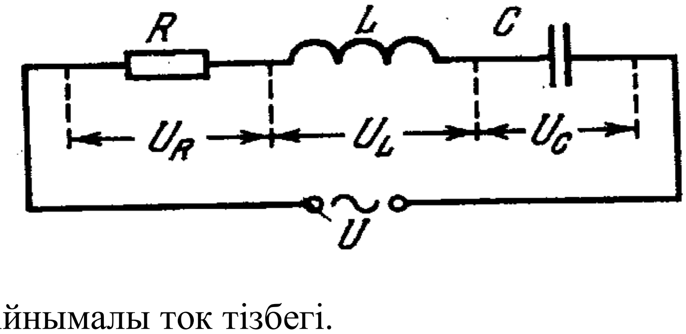
Енді (12.25) өрнегін мына түрде жазайық:

$$IR + \frac{q}{C} + L\frac{dI}{dt} = U_m \cos\omega t \tag{12.28}$$

IR көбейтіндісі актив кедергідегі кернеуге U_R тең, $\frac{q}{\tilde{N}}$ – конденсатордағы кернеу U_C, L(dI/dt) индуктивтіктегі кернеуді U_L анықтайды. Осыларды ескеріп, былай жазамыз:

$$U_R + U_C + U_L = U \cos\omega t, \tag{12.29}$$

әрбір уақыт мезетіндегі контурдың элементтеріндегі кернеулердің қосындысы сырттан берілген кернеуге тең (12.4-сурет).



12.4-сурет. Айнымалы ток тізбегі.

(12.29) өрнекке сәйкес:

$$U_R = RI_m \cos(\omega t - \varphi). \tag{12.30}$$

(12.23) өрнекті сыйымдылыққа бөліп, конденсатордағы кернеуді табамыз:

$$U_C = \frac{q_m}{c}\cos(\omega t - \psi) = U_{cm}\cos(\omega t - \varphi - \pi/2)\,, \qquad (12.31)$$

мұндағы

$$U_{cm} = \frac{q_m}{C} = \frac{U_m}{\omega C\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)^2}} = \frac{I_m}{\omega C}\ . \qquad (12.32)$$

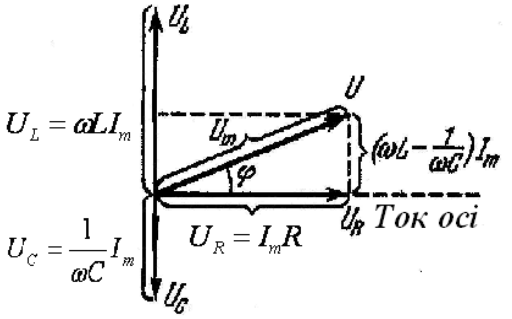
(12.25) функциясының туындысын L-ге көбейтіп, индуктивтіктегі кернеуді табамыз:

$$U_L = L\frac{dI}{dt} = -\omega LI\sin(\omega t - \varphi) = U_{Lm}\cos(\omega t - \varphi + \pi/2)\,, \qquad (12.33)$$

мұндағы

$$U_{Lm} = \omega LI_m\,. \qquad (12.34)$$

(12.29), (12.30), (12.31) және (12.33) өрнектерін салыстыра отырып, байқайтынымыз, сыйымдылықтағы кернеу ток күшінен π/2 фазаға қалып қоятынын, ал индуктивтіліктегі кернеу токтан π/2 фазаға озып отыратынын байқаймыз. Актив кедергіде кернеу мен ток бір фазада болады. Фазалардың қатынастарын векторлық диаграммада өте көрнекті етіп көрсетуге болады. Токтар осін, бастапқы фаза есептелетін түзу ретінде алайық. Онда 3.6-суреттегі диаграмманы аламыз. (12.34) өрнекке сәйкес U_R, U_C, U_L қосындылары тізбекке берілген U кернеуді беруі керек.



12.5-сурет. Сыйымдылық, индуктив және актив кернеулерінің векторлық диаграммасы.

Сондықтан диаграммадағы U, әрбір U_R, U_C, U_L векторларының қосындысы түрінде көрсетілген.

Әдебиеттер:
Нег. 4 [24-38], 4 [14-25].
Қос. 12 [108-127].
Бақылау сұрақтары:

1. Өшпейтін және өшетін электромагниттік тербелістер. Өшудің логарифмдік декременті.
2. Контурдағы еріксіз тербелістер. Резонанс

3. Айнымалы ток тізбегіндегі реактивті кедергі,(индуктивтік және сыйымдылық кедергілері).
4. Айнымалы ток тізбегі. Ток пен кернеудің эффективті мәндері.
5. Айнымалы ток қуаты
6. Айнымалы ток тізбегі үшін Ом заңы.