МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

ЗАПАДНО-КАЗАХСТАНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М. УТЕМИСОВА

Кульжумиева А.А.

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Уральск, 2024

УДК 512:514
ББК 22.1
К 90

Выписка №16 из протокола №2 внеочередного заседания Учебно-методического объединения (группы управления проектами) в области образования «Педагогические науки» на базе КазНПУ имени Абая от 14.03.2024 г.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Сартабанов Ж.А.	доктор физико-математических наук, профессор Актюбинского регионального университета им. К.Жубанова
Асанова А.Т.	доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отдела «Дифференциальные уравнения-2» Института математики и математического моделирования КН МНВО РК
Жумагалиева А.Е.	кандидат физико-математических наук, доцент Западно-Казахстанского университета им. М.Утемисова

Кульжумиева А.А.
К90 Алгебра и геометрия: Учебное пособие / А.А.Кульжумиева. – Уральск: РИЦ ЗКУ им. М.Утемисова, 2024. – 111 с.

ISBN 978-601-266-669-4

Учебное пособие содержит необходимые теоретические сведения по алгебре и геометрии, типовые задачи даются с подробными решениями, имеется большое количество задач, которые могут быть использованы для домашних заданий, контрольных работ, индивидуальных и самостоятельных заданий, в конце каждой темы включен список вопросов для контроля, предложены примерные тестовые задания. Пособие предназначено для студентов 1 курса образовательной программы 6В01504 Физика.

ВВЕДЕНИЕ

Пособие составлено в соответствии с силлабусом дисциплины «Алгебра и геометрия» для образовательной программы 6B01504 Физика и предназначено для оказания помощи студентам в изучении данной дисциплины.

Цель учебного пособия – оказать помощь студентам при самостоятельном изучении материала по алгебре и геометрии.

Задачи учебного пособия по дисциплине «Алгебра и геометрия» заключаются в следующем:

- передать студентам в методически доступной форме определенную систему знаний по алгебре и геометрии, необходимые им для дальнейшего изучения других разделов математики;
- научить студентов самостоятельно решать задачи по алгебре и геометрии, применять, полученные знания к решению конкретных задач.

Учебное пособие охватывает следующие разделы дисциплины «Алгебра и геометрия»: основы линейной и векторной алгебры и аналитическую геометрию на плоскости и в пространстве.

По каждой теме приводятся необходимые теоретические сведения, типовые задачи даются с решениями. В конце каждой темы включены вопросы для контроля полученных знаний. В целях закрепления пройденного материала по каждой теме предлагаются задания, которые могут быть использованы для домашних заданий, контрольных работ, индивидуальных и самостоятельных заданий. В конце пособия приведены примерные тестовые задания, которые могут быть полезны студентам для самопроверки.

Для успешного изучения и решения заданий по алгебре и геометрии, предлагаемых в пособии, необходимо знание курса математики в объеме программы средней школы.

Учебное пособие по дисциплине «Алгебра и геометрия» предназначено для студентов физико-математического факультета.

Понятие матрицы. Действия над матрицами

Прямоугольная матрица порядка $m \times n$, обозначаемая

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

– это прямоугольная таблица из $m \times n$ действительных чисел, где первое число m равно числу строк, а n – числу столбцов матрицы A; коротко матрица A обозначается $A = (a_{ij})_{mn}$.

Элементы матрицы – числа a_{ij}, из которых состоит матрица. Индексы определяют положение элемента в таблице: первый индекс i – номер строки, второй j – номер столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}.

Если в матрице число строк равно числу столбцов, т.е. $m = n$, то такую матрицу называют квадратной.

Главная диагональ квадратной матрицы A образуется элементами с одинаковыми индексами $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$, а побочная диагональ – элементами $a_{n1}, a_{n-12}, ..., a_{1n}$.

Сумма элементов главной диагонали называется следом квадратной матрицы и обозначается $tr\,A$:

$$tr\,A = a_{11} + a_{12} + ... + a_{nn} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,.$$

Симметричная матрица – квадратная матрица, элементы которой симметричные относительно главной диагонали, равны $a_{ij} = a_{ji}$, $i = 1, 2, ..., m;\ j = 1, 2, ..., n$.

Единичная матрица – квадратная матрица, на главной диагонали которой стоят единицы, а остальные элементы нулевые:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Нулевая матрица – это матрица, все элементы которой равны нулю.

Часто используются матрицы, состоящие из одной строки или из одного столбца, которые называются вектор-строками или вектор-столбцами соответственно.

Матрицы одинакового размера можно складывать.

Суммой двух матриц A и B называется матрица C, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B.

ПРИМЕР 1. Найти сумму матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -5 & 14 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.

РЕШЕНИЕ.

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 14 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+(-5) & 4+14 \\ -1+0 & -7+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 18 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Произведением матрицы A на число λ называется матрица B, элементы которой равны произведению числа λ на соответствующие элементы матрицы A.

ПРИМЕР 2. Найти произведение матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}$ на число $\lambda = -3$.

РЕШЕНИЕ.

$$B = \lambda \cdot A = -3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ 3 & 21 \end{pmatrix}.$$

Произведением двух матриц A и B называется матрица C, элементы которой находятся по формуле: $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}$. Эта операция связывает матрицы A и B следующим условием: число столбцов в матрице A равно числу строк в матрице B, причем $A \cdot B \neq B \cdot A$.

ПРИМЕР 3. Найти произведение матриц $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ 5 & -1 & 0\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$.

РЕШЕНИЕ.

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ 5 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot 1+4\cdot 3+3\cdot 5 & 2\cdot 2+4\cdot 4+3\cdot 6\\ 5\cdot 1+(-1)\cdot 3+0\cdot 5 & 5\cdot 2+(-1)\cdot 4+0\cdot 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}29 & 38\\ 2 & 6\end{pmatrix}.$$

Транспонирование матрицы – это операция над матрицей, когда ее строки становятся столбцами. Обозначается A^T.

Если матрица A – это матрица размера $m\times n$, то матрица A^T имеет размер $n\times m$.

ПРИМЕР 4. Найти транспонированную матрицу A^T по отношению к матрице $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ -4 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

РЕШЕНИЕ.

$$A^T=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ -4 & 0 & 1\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 2 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}.$$

Перестановочные (коммутирующие) матрицы – это матрицы, для которых $A\cdot B=B\cdot A$.

ПРИМЕР 5. Являются ли матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -2 & -4\end{pmatrix}$ перестановочными?

РЕШЕНИЕ. Для этого нужно проверить выполняется ли условие $A\cdot B=B\cdot A$.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -2 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot(-3)+2\cdot(-2) & 1\cdot 2+2\cdot(-4)\\ -2\cdot(-3)+0\cdot(-2) & -2\cdot 2+0\cdot(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & -6\\ 6 & -4\end{pmatrix},$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -2 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\cdot 1+2\cdot(-2) & -3\cdot 2+2\cdot 0\\ -2\cdot 1+(-4)\cdot(-2) & -2\cdot 2+(-4)\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & -6\\ 6 & -4\end{pmatrix},$$

т.е. условие $A\cdot B=B\cdot A$ выполняется и, следовательно, матрицы A и B являются перестановочными.

Задание. Выполните действия над матрицами.

№1 $2\,(A+B)(2B-A),\quad где\quad A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 4 & 5 & 2\\ -1 & 0 & 7\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & -2 & 4\end{pmatrix}.$

№2 $3A-(A+2B)B,\quad где\quad A=\begin{pmatrix}4 & 5 & -2\\ 3 & -1 & 0\\ 4 & 2 & 7\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ 5 & 7 & 3\end{pmatrix}.$

№3 $2(A-B)\left(A^2+B\right),\quad где\quad A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 7\\ -10 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 7 & 2 & 1\end{pmatrix}.$

№4 $\left(A^2-B^2\right)(A+B),\quad где\quad A=\begin{pmatrix}7 & 2 & 0\\ -7 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}.$

№5 $\left(A-B^2\right)(2A+B),\quad где\quad A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 0\\ 10 & 4 & 1\\ 7 & 3 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 6 & -1\\ -1 & -2 & 0\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}.$

№6 $(A-B)\cdot 2A+2B,\quad где\quad A=\begin{pmatrix}5 & -1 & 3\\ 0 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 7 & -2\\ 1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}.$

№7 $2(A-0{,}5B)+AB,\quad где\ A=\begin{pmatrix}5 & 3 & -1\\ 2 & 0 & 4\\ 3 & 5 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 16\\ -3 & -2 & 0\\ 5 & 7 & 2\end{pmatrix}.$

№8 $(A-B)A+3B,\quad где\ A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -5\\ 4 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 2\\ -1 & -3 & 4\end{pmatrix}.$

№9 $2A-\left(A^2+B\right)B,\quad где\ A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & 6 & -2\\ 4 & 10 & 1\\ 2 & 4 & -5\end{pmatrix}.$

№10 $3\left(A^2-B^2\right)-2AB,\quad где\ A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ 3 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 5 & -7 & -2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$

№11 $(2A-B)(3A+B)-2AB,\quad где\ A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ -2 & 0 & 1\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}7 & 5 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ -3 & -1 & -1\end{pmatrix}.$

№12 $A\left(A^2-B\right)-2(B+A)B,\quad где\ A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 4\\ 5 & 3 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 13\\ -1 & 0 & 5\\ 5 & 13 & 21\end{pmatrix}.$

№13 $A(2A+B)-B(A-B),\quad где\ A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}9 & 8 & 7\\ 2 & 7 & 3\\ 4 & 3 & 5\end{pmatrix}.$

№14 $(A+B)A-B(2A+3B),\quad где\ A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & 5\\ 1 & 4 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4 & 11 & 3\\ 1 & 6 & 1\\ 2 & 2 & 16\end{pmatrix}.$

№15 $3(A+B)(AB-2A),$ *где* $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 22 & -14 & 3 \\ 6 & -7 & 0 \\ 11 & 3 & 15 \end{pmatrix}$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение матрицы.
2. Какая матрица называется квадратной?
3. Какая матрица называется диагональной?
4. Какая матрица называется единичной?
5. Можно ли складывать матрицы разного размера?
6. Какое условие должно выполняться при умножении матриц?
7. Какая матрица называется транспонированной?
8. Что называется следом квадратной матрицы?
9. При выполнении какого условия матрицы A и B называются перестановочными?
10. Найдите все матрицы второго порядка, квадраты которых равны единичной матрице?

Определители

Пусть дана матрица второго порядка $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Определителем (детерминантом) второго порядка матрицы A называется число, равное $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Определитель обозначают символом $\det A$ или

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Элементы матрицы A называются элементами определителя. Элементы a_{11}, a_{22} образуют главную диагональ, а элементы a_{21}, a_{12} – побочную.

ПРИМЕР 1. Вычислить определитель матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$.

РЕШЕНИЕ. $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 24 - 5 = 19$.

Пусть дана матрица третьего порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Определитель третьего порядка можно вычислить по правилу треугольника:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

ПРИМЕР 2. Вычислить определитель матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 3 - 3 \cdot 3 \cdot 3 - 4 \cdot 4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 5 = 0.$$

Теперь построим понятие определителя порядка n. Для этого рассмотрим квадратную $n \times n$ матрицу A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определитель n порядка можно вычислить следующим образом:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in}.$$

Данное равенство называют разложением определителя по элементам i-ой строки или просто по i-ой строке. Выражение A_{ij} называется алгебраическим дополнением элемента a_{ij} в определителе $|A|$. Итак, определитель равен сумме произведений элементов любой строки на их алгебраические дополнения.

Выделим в определителе n порядка элемент a_{ij}. Если вычеркнуть из этого определителя i-ю строку и j-ый столбец (строку и столбец), в которых расположен элемент a_{ij}, то останется некоторый определитель $n-1$ порядка. Этот определитель называют минором элемента a_{ij} и обозначают M_{ij}.

Алгебраическое дополнение любого элемента a_{ij} определителя n порядка $|A|$ равно минору этого элемента умноженному на $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

ПРИМЕР 3. Найти все алгебраические дополнения элементов матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

РЕШЕНИЕ. Найдем алгебраические дополнения элементов заданной матрицы согласно формуле $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 2 = 6,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -(12 + 4) = -16,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -(-4 + 3) = 1,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 6 = 6,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -(0 - 2) = 2,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(0 - 9) = 9,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 3 = 3.$$

ПРИМЕР 4. Вычислить определитель матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

РЕШЕНИЕ. Для этого разложим определитель заданной матрицы по элементам первой строки

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -3 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+7\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ -2 & -3 & 2\\ 1 & 3 & 4\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & -3 & 3\\ 1 & 3 & 5\end{vmatrix}=$$

$$=3\cdot(24+18-60-36-20+36)-5\cdot(12-40+6-12-10+24)+$$

$$+7\cdot(-12-24+4+12-6+16)-2\cdot(-15-18+6+9-9+20)=$$

$$=-114+100-70+14=-70.$$

Определитель не меняется при транспонировании, т.е.

$$\det A^T=\det A.$$

Это означает, что строки и столбцы определителя равноправны: любое утверждение, справедливое для строк, будет справедливо и для столбцов.

При перестановке двух строк определитель умножается на (-1).

Определитель, содержащий две одинаковые строки равен нулю.

Общий множитель элементов любой строки можно выносить за знак определителя.

Задание. Вычислите определители.

№1 **1)** $\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 6 & 5\end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 4\\ 5 & 3 & 0\end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix}1 & 7 & 3 & 0\\ 2 & 10 & 2 & 3\\ -1 & -5 & -8 & 2\\ 3 & -1 & 4 & 6\end{vmatrix}$

№2 **1)** $\begin{vmatrix} 15 & -6 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

№3 **1)** $\begin{vmatrix} 23 & -9 \\ 8 & -4 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

№4 **1)** $\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -6 & 44 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 & -7 \\ 3 & -5 & 7 & -1 \\ 5 & -7 & 1 & -3 \\ 7 & -1 & 3 & -5 \end{vmatrix}$

№5 **1)** $\begin{vmatrix} 35 & 14 \\ 12 & 0 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -4 & -8 \\ -1 & -3 & -9 & -27 \\ -1 & -4 & -16 & -64 \end{vmatrix}$

№6 **1)** $\begin{vmatrix} -82 & -15 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & -1 \\ 17 & 1 & 7 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 6 & -5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

№7 **1)** $\begin{vmatrix} -36 & -3 \\ 41 & -2 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -7 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 3 & -7 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & -1 & 8 \\ -9 & 5 & 7 & -3 \\ -2 & -6 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

№8 **1)** $\begin{vmatrix} 15 & 0 \\ 18 & -11 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 4 & 10 & 1 \\ 2 & 4 & -5 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ -3 & -4 & -5 & -6 \end{vmatrix}$

№9 **1)** $\begin{vmatrix} 25 & -60 \\ -4 & -4 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

№10 **1)** $\begin{vmatrix} 63 & -7 \\ 8 & -3 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

№11 **1)** $\begin{vmatrix} -5 & -4 \\ 13 & 27 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$

№12 **1)** $\begin{vmatrix} -6 & 37 \\ 8 & -15 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

№13 **1)** $\begin{vmatrix} 77 & 8 \\ 43 & -2 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 2 & -8 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -3 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

№14 **1)** $\begin{vmatrix} 14 & -3 \\ 68 & -5 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 7 & -8 \end{vmatrix}$

№15 **1)** $\begin{vmatrix} 3 & 16 \\ -9 & -28 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & -6 & 8 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \\ 1 & -2 & -3 & -1 \end{vmatrix}$

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется определителем второго порядка?
2. Что называется определителем третьего порядка?
3. Назовите элементы матрицы третьего порядка, которые образуют главную диагональ?
4. Назовите элементы матрицы второго порядка, которые образуют побочную диагональ?
5. Напишите правило треугольника для вычисления определителя третьего порядка?
6. Что называется алгебраическим дополнением?
7. По какому правилу вычисляется определитель четвертого порядка?
8. Изменится ли определитель при транспонировании?
9. Как изменится определитель порядка n, если его строки написать в обратном порядке?
10. Что называют минором?

Решение СЛАУ методом Крамера

Метод Крамера применяется для решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), в которых число неизвестных переменных равно числу уравнений и определитель основной матрицы отличен от нуля.

Основной недостаток метода Крамера – сложность вычисления определителей, если число уравнений системы больше трех.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

где $x_1, x_2, ..., x_n$ – неизвестные переменные, a_{ij}, $(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n})$ – числовые коэффициенты, $b_1, b_2, ..., b_n$ – свободные члены.

Решением такой системы называется набор значений $x_1, x_2, ..., x_n$, при которых все уравнения системы обращаются в тождества.

Система линейных алгебраических уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение. В противном случае система называется несовместной.

Система линейных алгебраических уравнений называется определенной, если она совместна и имеет единственное решение. В противном случае, если система линейных алгебраических уравнений совместна и имеет более одного решения, то система называется неопределенной.

Система линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение, если матрица A – невырожденная, т.е. ее определитель отличен от нуля.

Решение системы линейных алгебраических уравнений методом Крамера находится по следующему алгоритму:

1. Вычисляем определитель основной матрицы

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

2. Вычисляем дополнительные определители, полученные из матрицы A заменой k-го, $(k=\overline{1,n})$ столбца на столбец свободных членов

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\Delta x_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

3. Вычисляем искомые неизвестные переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ по формулам Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta}.$$

4. Выполняем проверку результатов, подставляя найденные $x_1, x_2, ..., x_n$ в заданную систему.

Заметим, что порядок следования неизвестных переменных в уравнениях системы важен при составлении определителя основной матрицы и дополнительных определителей.

Если задана однородная система линейных алгебраических уравнений $(b_1 = b_2 = ... = b_n = 0)$, то решением будет являться $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

ПРИМЕР. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

по формулам Крамера.

РЕШЕНИЕ. Составим основной определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 6 + 6 - 27 - 1 - 8 = -18,$$

а также дополнительные определители

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 0 + 0 - 0 - 1 - 0 = 5,$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 3 - 0 - 0 - 4 = -1,$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 0 - 9 - 0 - 0 = -7.$$

Тогда

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=-\frac{5}{18},\ y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{1}{18},\ z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{7}{18}.$$

Задание. Решите систему линейных уравнений по формулам Крамера.

№ 1 $$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1; \\ 3x_1-x_2-x_3-2x_4=-4; \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6; \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4. \end{cases}$$

№ 2 $$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6; \\ x_1-x_2-2x_3-3x_4=8; \\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4; \\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=-8. \end{cases}$$

№ 3 $$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5; \\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4=1; \\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4=1; \\ 4x_1+3x_2+2x_3+x_4=-5. \end{cases}$$

№ 4 $$\begin{cases} x_2-3x_3+4x_4=-5; \\ x_1-2x_3+3x_4=-4; \\ 3x_1+2x_2-5x_4=12; \\ 4x_1+3x_2-5x_3=5. \end{cases}$$

№ 5 $$\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3+7x_4=12; \\ 3x_1+5x_2+7x_3+x_4=0; \\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4=4; \\ 7x_1+x_2+3x_3+5x_4=16. \end{cases}$$

№ 6
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 20; \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 9; \\ 5x_1 - 7x_2 + 10x_4 = -9; \\ \quad 3x_2 - 5x_3 = 1. \end{cases}$$

№ 7
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8; \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9; \\ \quad 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5; \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

№ 8
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4; \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6; \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$$

№ 9
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 8; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -1; \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 10. \end{cases}$$

№ 10
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_4 = -9; \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -7; \\ \quad 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 12; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

№11
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2; \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3; \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = -6. \end{cases}$$

№ 12
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0; \\ \quad x_2 + 2x_3 - x_4 = 2; \\ x_1 - x_2 - x_4 = -1; \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

№ 13 $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_4 = -9; \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = -7; \\ 3x_1 - 2x_3 + x_4 = -16; \\ x_1 - 4x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$

№ 14 $\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 4x_4 = 9; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 8; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$

№ 15 $\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 12; \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12; \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0; \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$

Вопросы для самоконтроля:

1. Напишите формулы Крамера.
2. Сколько решений имеет система линейных уравнений, если основной определитель системы отличен от нуля?
3. Если определитель системы равен нулю, то сколько решений имеет данная система?
4. Как из основного определителя получаем дополнительные определители системы?
5. Какая система линейных уравнений называется несовместной?
6. Какие системы линейных уравнений называются однородными?
7. Какие системы линейных уравнений называются неоднородными?
8. Какая система линейных уравнений называется совместной?
9. Какая система линейных уравнений называется определенной?
10. Какая система линейных уравнений называется неопределенной?

Понятие обратной матрицы. Ранг матрицы

Рассмотрим квадратную матрицу A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица A^{-1} называется обратной для квадратной матрицы A, если выполняется соотношение

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Обратите внимание, что понятие обратной матрицы вводится только для квадратных матриц. Однако не все квадратные матрицы обратимы.

Алгоритм нахождения обратной матрицы:

1. Вычисляем определитель матрицы A.
2. Определяем алгебраические дополнения (если $|A| \neq 0$), составляем матрицу дополнений $\overline{A}$.
3. Находим транспонированную матрицу $\overline{A}^T$.
4. Находим обратную матрицу, разделив каждый элемент полученной матрицы на определитель исходной матрицы.
5. Умножим исходную и обратную матрицы. В результате должна получиться единичная матрица.

ПРИМЕР 1. Найдите матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

РЕШЕНИЕ. Вычислим определитель заданной матрицы

$$\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} = -18 + 100 - 84 - 105 + 90 + 16 = -1.$$

Теперь определим алгебраические дополнения

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 8 = -1,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -(-18 - 20) = 38,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -12 - 15 = -27,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -(-15 - 14) = 1,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 35 = -41,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 - 25) = 29,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 21 = -1,$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -(8 - 42) = 34,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 30 = -24.$$

Матрица дополнений имеет вид

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} -1 & 38 & -27 \\ 1 & -41 & 29 \\ -1 & 34 & -24 \end{pmatrix}.$$

Находим транспонированную матрицу

$$\overline{A}^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix}.$$

Находим обратную матрицу

$$A^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим понятие ранга матрицы. Ранг матрицы – наивысший порядок отличных от нуля миноров. Обозначается через r или $rang(A)$.

Ранг матрицы равен нулю только для нулевой матрицы. В противном случае ранг матрицы равен некоторому положительному числу.

Для квадратной матрицы n-го порядка $r = n$, если матрица невырожденная.

$m \times n$ матрица называется матрицей полного ранга, если ее ранг равен минимальному из чисел m и n.

На практике удобнее при вычислении ранга матрицы использовать элементарные преобразования матрицы:

- транспонирование;

- перестановка двух строк (столбцов);

-умножение всех элементов строки (столбца) на число не равное нулю;

- сложение соответствующих элементов строки (столбца);

- вычеркивание нулевой строки (столбца).

После использования элементарных преобразований ранг матрицы будет равен количеству ненулевых строк.

ПРИМЕР. Найдите ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 & 8 \\ 7 & 1 & -2 & -1 & 12 \\ 11 & 1 & -3 & 0 & 16 \\ 2 & 2 & -1 & -5 & 12 \end{pmatrix}$.

РЕШЕНИЕ. Так как порядок заданной матрицы 4×5, то ее ранг может быть не больше 4. Используя следующие элементарные преобразования:

- умножим первую строку на -2 и прибавим вторую строку;
- умножим первую строку на -3 и прибавим третью строку;
- умножим первую строку на -1 и прибавим четвертую строку

получим

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 & 8 \\ 7 & 1 & -2 & -1 & 12 \\ 11 & 1 & -3 & 0 & 16 \\ 2 & 2 & -1 & -5 & 12 \end{pmatrix} \begin{matrix} I \cdot (-2) + II \\ I \cdot (-3) + III \\ I \cdot (-1) + IV \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 & 8 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 0 & 6 & -8 \\ -1 & 1 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Далее

- разделим третью строку на 2;
- умножим четвертую строку на -1:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 & 8 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 0 & 6 & -8 \\ -1 & 1 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} III : 2 \\ IV \cdot (-1) \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 & 8 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Теперь от второй строки вычтем сначала третью строку, затем от второй строки вычтем четвертую строку:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 & 8 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} II - III \\ II - IV \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 & 8 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычеркнем третью и четвертую строки, затем поменяем местами первую и вторую строки:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 & 8 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 & 8 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -1 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Умножим первую строку на -3 и прибавим вторую строку

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -1 & -2 & 8 \end{pmatrix} I \cdot (-3) + II \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & -1 & -11 & 20 \end{pmatrix}.$$

У матрицы осталось две строки, следовательно, ранг заданной матрицы $r = 2$.

Задание. 1) Найдите обратную матрицу для матрицы A.
2) Найдите ранг матрицы с помощью элементарных преобразований.

№ 1. 1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & 0 \\ 2 & 10 & 2 & 3 \\ -1 & -5 & -8 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

№ 2. 1)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

2) $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & -4 & 3\\ 3 & -4 & -1 & -2\\ 4 & 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$

№ 3. **1)** $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 7\\ -10 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$

2) $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 3 & 4\\ 1 & 0 & -2 & 3\\ 3 & 2 & 0 & -5\\ 4 & 3 & 5 & 0\end{pmatrix}$

№ 4. **1)** $A=\begin{pmatrix}7 & 2 & 0\\ -7 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

2) $B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 5 & -7\\ 3 & -5 & 7 & -1\\ 5 & -7 & 1 & -3\\ 7 & -1 & 3 & -5\end{pmatrix}$

№ 5. **1)** $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 0\\ 10 & 4 & 1\\ 7 & 3 & 2\end{pmatrix}$

2) $B=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & -2 & -4 & -8\\ -1 & -3 & -9 & -27\\ -1 & -4 & -16 & -64\end{pmatrix}$

№ 6. **1)** $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

2) $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 6 & -5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

№ 7. **1)** $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

2) $B=\begin{pmatrix} 3 & -7 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & -1 & 8 \\ -9 & 5 & 7 & -3 \\ -2 & -6 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

№ 8. **1)** $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2) $B=\begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ -3 & -4 & -5 & -6 \end{pmatrix}$

№ 9. **1)** $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2) $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

№ 10. **1)**

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ -2 & 0 & 1\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

2) $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 1 & 1\\ 4 & -5 & 2 & -3\end{pmatrix}$

№ 11. **1)**

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

2) $B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 4 & 1\\ 4 & -2 & 3 & 2\\ 3 & -1 & 0 & 4\\ 3 & -2 & 4 & -1\end{pmatrix}$

№ 12. **1)**

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & 5\\ 1 & 4 & -1\end{pmatrix}$$

2) $B=\begin{pmatrix}5 & 0 & 2 & -1\\ 4 & -2 & 3 & 1\\ -3 & 4 & -5 & 2\\ 1 & 2 & 5 & 4\end{pmatrix}$

№ 13. **1)**

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 0\\ 4 & -3 & 0\end{pmatrix}$$

2) $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

№ 14. **1)** $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 6 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

2) $B=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 7 & -8 \end{pmatrix}$

№ 15. **1)** $A=\begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

2) $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & -6 & 8 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \\ 1 & -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

Вопросы для самоконтроля:

1. Сформулируйте определение обратной матрицы.
2. Всегда ли существует обратная матрица?
3. Напишите формулу обратной матрицы.
4. Запишите формулу вычисления обратной матрицы для квадратной матрицы второго порядка?
5. Существует ли обратная матрица для матрицы-строки (0 3 -5)?
6. Что такое транспонирование матрицы?
7. Что называется рангом матрицы?
8. Чему равен ранг квадратной невырожденной матрицы?

9. Какие действия не меняют ранг матрицы?
10. В каком случае матрица имеет полный ранг?

Решение СЛАУ матричным методом

Запишем СЛАУ в матричном виде

$$A \cdot X = B,$$

где A – квадратная $n \times n$ матрица (основная матрица системы)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

элементами которой являются коэффициенты при неизвестных переменных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец свободных членов, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец неизвестных переменных. Пусть определитель матрицы A отличен от нуля.

Так как $|A| \neq 0$, то матрица A – обратима, т.е. существует обратная матрица.

Если умножить обе части равенства $A \cdot X = B$ на A^{-1} слева, то получим формулу для нахождения матрицы-столбца неизвестных переменных

$$A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B \quad \Leftrightarrow \quad X = A^{-1}\cdot B.$$

Итак, мы получили решение СЛАУ матричным методом (методом обратной матрицы).

ПРИМЕР 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+3y+2z=9 \\ x+2y-3z=14 \\ 3x+4y+z=16 \end{cases}$$

матричным методом.

РЕШЕНИЕ. Перепишем систему в виде $A\cdot X = B$, где $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$.

Решение матричного уравнения имеет вид $X = A^{-1}B$. Найдем A^{-1}. Имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 4+8-27-12+24-3=-6.$$

Вычислим алгебраические дополнения элементов этого определителя:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2+12=14,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(1+9) = -10$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4-6=-2$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(3-8) = 5,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(8-9) = 1$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 4 = -13,$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -(-6-2) = 8,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1.$$

Таким образом,

$$X = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x = 2,\ y = 3,\ z = -2$.

Задание. Решите СЛАУ с помощью обратной матрицы.

№ 1.

$$\begin{cases} 5x+8y-z=-7; \\ x+2y+3z=1; \\ 2x-3y+2z=9. \end{cases}$$

№ 2.

$$\begin{cases} x+2y+z=4; \\ 3x-5y+3z=1; \\ 2x+7y-z=8. \end{cases}$$

№ 3.

$$\begin{cases} 3x+2y+z=5; \\ 2x+3y+z=1; \\ 2x+y+3z=11. \end{cases}$$

№ 4.

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=31; \\ 5x_1+x_2+2x_3=29; \\ 3x_1-x_2+x_3=10. \end{cases}$$

№ 5.

$$\begin{cases} 4x-3y+2z=9; \\ 2x+5y-3z=4; \\ 5x+6y-2z=18. \end{cases}$$

№ 6.

$$\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4; \\ 3x_1+4x_2-2x_3=11; \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11. \end{cases}$$

№ 7.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

№ 8.
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5; \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15. \end{cases}$$

№ 9.
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4; \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

№ 10.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -1; \\ 3x_1 - 2x_2 = 8. \end{cases}$$

№ 11.
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

№ 12.
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3; \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 8; \\ \qquad 2x_2 + 7x_3 = 17. \end{cases}$$

№ 13.
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = -7; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

№ 14.
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = -7\,; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0\,; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2\,. \end{cases}$$

№ 15.
$$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8\,; \\ 2x - y - 3z = -1\,; \\ x + 5y + z = 0\,. \end{cases}$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Какую формулу используют при решении СЛАУ матричным методом?
2. При каком условии СЛАУ можно решить матричным методом?
3. Что является решением СЛАУ?
4. Верно ли утверждение, что порядок следования неизвестных переменных в уравнениях системы важен при составлении определителя основной матрицы?
5. Алгоритм решения системы матричным методом.
6. Запишите СЛАУ в матричной форме.
7. Сколько решений может иметь СЛАУ?
8. Можно ли решить СЛАУ матричным методом, если определитель основной матрицы равен нулю?
9. Какова схема нахождения обратной матрицы?
10. Как по другому называется матричный метод?

Решение СЛАУ методом Гаусса

Метод Гаусса наиболее универсальный метод для нахождения решения любой системы линейных алгебраических уравнений.

При нахождении решения системы линейных алгебраических уравнений мы будем использовать понятия: ведущий элемент, ступенчатая матрица и расширенная матрица.

Ведущие элементы матрица – это первые ненулевые элементы ее строк.

Ступенчатая матрица – это матрица, в которой нет нулевых строк и номера столбцов ее ведущих элементов возрастают.

Расширенной матрицей системы линейных алгебраических уравнений называется матрица, полученная из матрицы системы дописыванием справа после вертикальной черты столбца свободных членов.

Метод Гаусса основан на идее сведения с помощью элементарных преобразований строк расширенной матрицы к равносильной ступенчатой или треугольной матрице, а затем последовательного выражения неизвестных.

Рассмотрим систему m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные переменные, a_{ij}, $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$ – числовые коэффициенты, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – свободные члены.

Любую ненулевую матрицу с помощью элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду.

Для любой ступенчатой системы линейных алгебраических уравнений возможен один из случаев:

1. Система имеет противоречивое уравнение, т.е. система является несовместной, следовательно, система решений не имеет.
2. Система не имеет противоречивого уравнения, тогда
   - если $m = n$, то система имеет единственное решение;
   - если $m < n$, то система имеет бесконечно много решений.

Разберем метод Гаусса на конкретном примере.

ПРИМЕР. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - y + z - t = 2 \\ 2x - y - t = 1 \\ 3x - z + t = 8 \\ 2x + 2y - 2z + 5t = 11 \end{cases}$$

методом Гаусса.

РЕШЕНИЕ. Составим расширенную матрицу заданной системы

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & 11 \end{array}\right).$$

Для того чтобы в расширенной матрице ведущим элементом первой строки была 1 поменяем местами первый и третий столбцы. Затем обнулим все элементы первого столбца под ведущим:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 & 8 \\ -2 & 2 & 2 & 5 & 11 \end{array}\right) \begin{array}{c} I + III \\ I \cdot 2 + IV \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 15 \end{array}\right).$$

Далее обнулим элементы второго столбца под ведущим элементом второй строки -1.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 15 \end{array}\right) II - III \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 15 \end{array}\right).$$

Теперь обнулим элементы третьего столбца под ведущим элементом третьей строки -3.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 15 \end{array}\right) III \cdot 2 + IV \ \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Вернемся от матрицы к системе уравнений

$$\begin{cases} z - y + 2x - t = 2, \\ \quad - y + 2x - 3t = 3, \\ \qquad -3x - t = -7, \\ \qquad\qquad t = 1. \end{cases}$$

Итак, получим следующее решение заданной системы $t = 1, x = 2, y = 0, z = -1$.

Все уравнения обращаются в тождества, если подставить полученные значения неизвестных переменных в заданную систему уравнений.

Задание. Решите СЛАУ методом Гаусса.

№ 1. **1)** $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5x + 8y - z = -7; \\ x + 2y + 3z = 1; \\ 2x - 3y + 2z = 9. \end{cases}$

№ 2. **1)** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6; \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + 2y + z = 4; \\ 3x - 5y + 3z = 1; \\ 2x + 7y - z = 8. \end{cases}$

№ 3. **1)** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5; \\ 2x + 3y + z = 1; \\ 2x + y + 3z = 11. \end{cases}$

№ 4. **1)** $\begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5; \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4; \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12; \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31; \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$

№ 5. **1)** $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12; \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0; \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4; \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 16. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9; \\ 2x + 5y - 3z = 4; \\ 5x + 6y - 2z = 18. \end{cases}$

№ 6. **1)** $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 20; \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 9; \\ 5x_1 - 7x_2 + 10x_4 = -9; \\ \quad 3x_2 - 5x_3 = 1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

№ 7. **1)** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8; \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9; \\ \quad 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5; \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

№ 8. **1)** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4; \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6; \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5; \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15. \end{cases}$

№ 9. **1)** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 8; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -1; \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 10. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4; \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

№ 10. **1)** $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_4 = -9; \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -7; \\ 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 12; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -1; \\ 3x_1 - 2x_2 = 8. \end{cases}$

№ 11. **1)** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2; \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3; \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = -6. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

№ 12. **1)** $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0; \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 2; \\ x_1 - x_2 - x_4 = -1; \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3; \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 8; \\ 2x_2 + 7x_3 = 17. \end{cases}$

№ 13. **1)** $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_4 = -9; \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = -7; \\ 3x_1 - 2x_3 + x_4 = -16; \\ x_1 - 4x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = -7; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

№ 14. **1)** $\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 4x_4 = 9; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 8; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6; \\ 2x + 3y - 4z = 16; \\ 3x - 2y - 5z = 12. \end{cases}$

№ 15. **1)** $\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 12; \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12; \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0; \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8; \\ 2x - y - 3z = -1; \\ x + 5y + z = 0. \end{cases}$

Вопросы для самоконтроля:

1. Суть метода Гаусса.
2. К какому виду приводится система линейных алгебраических уравнений с помощью элементарных преобразований?
3. Приведите пример ступенчатой матрицы четвертого порядка.
4. Что такое ведущий элемент строки?
5. Какая матрица называется расширенной матрицей?
6. Когда мы можем использовать метод Гаусса?
7. Можно ли в методе Гаусса складывать строки?
8. Когда система линейных алгебраических уравнений имеет только одно решение?
9. Как понять, что система несовместна?
10. Оцените достоинства и недостатки матричного метода, метода Крамера и метода Гаусса для решения систем линейных алгебраических уравнений.

Комплексные числа.
Действия над комплексными числами

Комплексным числом (в алгебраической форме) называется число вида

$$z = x + i\,y,$$

где x и y – действительные числа, i – мнимая единица, определяемая равенством

$$i = \sqrt{-1},$$

x называется действительной частью, y мнимой частью числа z. Их обозначают так:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Если $x = 0$, то число $0 + i\,y = i\,y$ называется чисто мнимым, если $y = 0$, то получается действительное число $x + i\,0 = x$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + i\,y_1$ и $z_2 = x_2 + i\,y_2$ называются равными, если равны их действительные и мнимые части соответственно, т.е.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2,\, y_1 = y_2.$$

Над комплексными числами можно производить различные арифметические и алгебраические действия, а также действие сопряжения, которое изменяет знак мнимой части.

Комплексное число $\bar{z} = x - i\,y$ называется сопряженным комплексному числу $z = x + i\,y$.

Следует заметить, что $\bar{\bar{z}} = z$.

Сложение, вычитание, умножение и деление удобно производить над комплексными числами, записанными в алгебраической форме.

Пусть $z_1 = x_1 + i\,y_1$ и $z_2 = x_2 + i\,y_2$. Суммой комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2).$$

Разностью комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2).$$

Произведением комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Частным комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

ПРИМЕР. Дано: $z_1 = -2 + 3i$ и $z_2 = 4 + 5i$.

Найти: $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$.

РЕШЕНИЕ. Выполним действия:

$$z_1 + z_2 = (-2 + 3i) + (4 + 5i) = (-2 + 4) + i\,(3 + 5) = 2 + 8i,$$

$$z_1 - z_2 = (-2 + 3i) - (4 + 5i) = (-2 - 4) + i\,(3 - 5) = -6 - 2i,$$

$$z_1 z_2 = (-2 + 3i)(4 + 5i) = -8 + 12i - 10i - 15 = -23 + 2i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-2 + 3i}{4 + 5i} = \frac{(-2 + 3i)(4 - 5i)}{(4 + 5i)(4 - 5i)} = \frac{7 + 22i}{41} = \frac{7}{41} + i\,\frac{22}{41}.$$

Любое комплексное число (кроме нуля) можно записать в тригонометрической форме:

.

Модулем комплексного числа называется длина вектора и обозначается :

.

является действительным неотрицательным числом, т.е. . Равенство выполняется тогда и только тогда, когда и одновременно.

Угол между положительным направлением оси и вектором называется аргументом и обозначается . Он определяется не однозначно, а с точностью до слагаемого, кратного . Единственное значение аргумента, удовлетворяющее условию , называется главным значением аргумента и обозначается :

.

Для понятие аргумента не определенно.

Главное значение аргумента можно вычислить по формуле:

ПРИМЕР. Записать число в тригонометрической форме.

РЕШЕНИЕ. . Так как и , то . Поэтому

тригонометрическая форма заданного комплексного числа.

Пусть , . Тогда арифметические действия над комплексными числами, записанными в тригонометрической форме, производятся следующим образом:

,

.

Также любое комплексное число (кроме нуля) можно записать в показательной форме:

,

где – модуль комплексного числа, – аргумент комплексного числа.

ПРИМЕР. Записать число в показательной форме.

РЕШЕНИЕ. Так как , , то

показательная форма заданного числа.

Пусть , . Тогда справедливо:

,

.

Возводить в натуральную степень (особенно если она достаточно велика) комплексные числа удобнее всего в тригонометрической форме. Если комплексное число задано в алгебраической форме, то его нужно изначально перевести в тригонометрическую форму, а затем использовать формулу Муавра:

,

где – модуль комплексного числа, – аргумент комплексного числа.

ПРИМЕР. Вычислить , если .

РЕШЕНИЕ. Переведем заданное число в тригонометрическую форму:

, ,

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Используя формулу Муавра получим:

.

Извлекать корень -ой степени ( ) из комплексного числа удобнее всего в тригонометрической форме. Если комплексное число задано в алгебраической форме, то его нужно изначально перевести в тригонометрическую форму, а затем использовать формулу:

$$z_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right) \quad , \qquad ,$$

где – модуль комплексного числа, – аргумент комплексного числа.

ПРИМЕР. Найдите корни уравнения .

РЕШЕНИЕ. Вычислим модуль и аргумент:

, ,

.

Тогда, используя формулу

$$z_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right) \quad , \; k = \overline{0, n-1},$$

получим

$$k = 0 : \; z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right),$$

$$k=1:\ z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right).$$

Задание. 1) Вычислите.

2) Найдите тригонометрическую форму числа.

3) Возведите в степень комплексные числа.

№1 1) $(2+i)(3-i)+(2+3i)(3+4i)$

2) $1+i$

3) $z=3+i\sqrt{3},\quad z^{20}=?$

№2 1) $(2+i)(3-7i)-(1+2i)(5+3i)$

2) $1-i$

3) $z=1-i\sqrt{3},\quad z^{30}=?$

№3 1) $(4+i)(5+3i)-(3-i)(3+i)$

2) $1+i\sqrt{3}$

3) $z=3+i\sqrt{3},\quad z^{10}=?$

№4 1) $\dfrac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$

2) $-1+i\sqrt{3}$

3) $z=1-i\sqrt{3},\quad z^{20}=?$

№5 1) $\dfrac{(5+i)(3+5i)}{2i}$

2) $1-i\sqrt{3}$

3) $z=1-i\sqrt{3},\quad z^{10}=?$

№6 1) $\dfrac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}$

2) $\sqrt{3}+i$

3) $z=1+i\sqrt{3},\quad z^{4}=?$

№7 1) $\frac{(2+i)(4+i)}{1+i}$

2) $-\sqrt{3}-i$

3) $z=1+i\sqrt{3}, \quad z^{20}=?$

№8 1) $\frac{(3-i)(1-4i)}{2-i}$

2) $\sqrt{3}-i$

3) $z=1+i\sqrt{3}, \quad z^{8}=?$

№9 1) $(2+i)^3+(2-i)^3$

2) $1+i\frac{\sqrt{3}}{3}$

3) $z=2\sqrt{3}+2i, \quad z^{6}=?$

№10 1) $(3+i)^3(3-i)^3$

2) $-1-i$

3) $z=2\sqrt{3}+2i, \quad z^{30}=?$

№11 1) $(6+i)(4-i)+(3+2i)(3-2i)$

2) $-2+i\,2\sqrt{3}$

3) $z=1+i, \quad z^{10}=?$

№12 1) $\frac{(1-i)(4+i)}{3i}$

2) $2-2i$

3) $z=2\sqrt{3}+2i, \quad z^{12}=?$

№13 1) $\frac{a+bi}{a-bi}$

2) $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

3) $z=1+i, \quad z^{20}=?$

№14 1) $(8-3i)(8+3i)-(6+i)(1-i)$

2) $-5i$

3) $z=\sqrt{3}+i, \quad z^{50}=?$

№15 1) $\frac{(9i-1)(2+4i)}{5i}$

2) $-2-i2\sqrt{3}$

3) $z=\sqrt{3}+i, \quad z^{20}=?$

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется комплексным числом в алгебраической форме?
2. Какое число называется сопряженным комплексному числу?
3. Чему равна мнимая единица?
4. Какое число называется чисто мнимым?
5. Какие комплексные числа называются равными?
6. Что называется модулем комплексного числа?
7. Что такое аргумент комплексного числа?
8. Напишите тригонометрическую форму комплексного числа.
9. Напишите формулу Муавра.
10. Напишите экспоненциальную форму комплексного числа.

Прямоугольная декартова и полярная системы координат

Возьмем на плоскости две взаимно перпендикулярные прямые a и b, пересекающиеся в точке O и на каждой прямой единичный вектор, исходящий из точки O. Обозначим вектор, расположенный на прямой a через $\bar{i}$, а вектор, расположенный на прямой b через $\bar{j}$.

Итак, две перпендикулярные прямые, на каждой из которых выбрано положительное направление и задан единичный вектор образуют прямоугольную декартову систему координат на плоскости.

Эта система обозначается следующим образом: $O\bar{i}\bar{j}$, Oxy или $\left(O,\bar{i},\bar{j}\right)$, где O – начало координат, $\bar{i},\bar{j}$ – координатные векторы.

Ось Ox – первая координатная ось или ось абсцисс, ось Oy – вторая координатная ось или ось ординат.

Задание системы координат на плоскости позволяет определить положение любой точки при помощи двух чисел. Координаты точки $A(x, y)$ в прямоугольной декартовой системе координат имеют простой геометрический смысл: они являются проекциям точки A.

Аналогично строится прямоугольная декартова система координат в пространстве, только состоит она из трех осей, где ось Oz – третья координатная ось или ось аппликат.

Пусть в прямоугольной декартовой системе координат заданы точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Тогда расстояние между точками или длину отрезка AB можно вычислить по формуле

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

Если в прямоугольной декартовой системе координат заданы точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, то координаты точки M, делящей отрезок AB в отношении λ можно вычислить по формуле

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}\,.$$

На прямой не существует точки, делящей отрезок в отношении $\lambda = -1$. Если $\lambda = -1$, то $AM = -MB$.

Возьмем на ориентированной плоскости точку O и некоторую ось, проходящую через эту точку. Ось задана единичным вектором $\bar{i}$.

Точку O, вектор $\bar{i}$ и положительное направление обхода плоскости называют полярной системой координат: $O\bar{i}$.

Точка O называется полюсом, ось i – полярной осью.

Если дана полярная система координат, то каждая точка плоскости может быть задана при помощи двух чисел.

Пусть M произвольная точка плоскости, отличная от полюса O. Положение этой точки однозначно определяется длиной вектора $\overline{OM}$: $r = \left|\overline{OM}\right|$ и направленным углом $\varphi = \angle\left(\bar{i}, \overline{OM}\right)$.

В самом деле, зная угол φ, можно построить луч OM и на этом луче отложить отрезок OM равный r.

Числа r и φ называются полярными координатами точки M в полярной системе координат; r – полярный радиус или первая полярная координата точки M, φ – полярный угол или вторая полярная координата: $M(r,\varphi)$.

Если точка M совпадает с точкой O, то $r=0$, а угол φ неопределен.

Полярный радиус любой точки неотрицателен и может изменяться $[0,+\infty)$. Полярный угол точки имеет бесконечное множество значений: если φ – какое-нибудь одно значение этой координаты, то $\varphi+2\pi k$, $k\in Z$ являются значениями этой координаты.

Если полярный угол положителен, то луч откладывается от полярной оси в положительном направлении обхода плоскости, если же угол отрицателен, то в отрицательном направлении.

Расстояние между точками $M_1(r_1,\varphi_1)$ и $M_2(r_2,\varphi_2)$ в полярной системе координат вычисляется по формуле

$$M_1M_2=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}\,.$$

Пусть $O\bar{i}$ данная полярная система координат, $O\bar{i}\bar{j}$ – прямоугольная декартова система координат, причем вектор $\bar{j}$ получен из вектора $\bar{i}$ поворотом на 90° в положительном направлении данной полярной системы. Тогда переход от полярных координат к декартовым координатам той же точки осуществляется по формулам

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi.$$

Формулы

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\ \varphi=arctg\,\frac{y}{x}$$

являются формулами перехода от декартовых координат к полярным.

ПРИМЕР. Определите полярные координаты точки $B(0,5)$.

РЕШЕНИЕ. Для перехода к полярным координатам воспользуемся формулами

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\ \varphi = arctg\frac{y}{x}.$$

У нас $x=0$, $y=5$. Тогда $r=5$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Итак, $B\left(5,\frac{\pi}{2}\right)$.

Задание. 1) Постройте точки, заданные полярными координатами.

2) Определите полярные (декартовы) координаты точки.

№1 **1)** $A\left(4,\frac{\pi}{4}\right)$

2) $A(\sqrt{3},1)$

№2 **1)** $B\left(2,\frac{4\pi}{3}\right)$

2) $B(-3,0)$

№3 **1)** $C\left(3,\frac{\pi}{6}\right)$

2) $C(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$

№4 **1)** $D\left(3,\frac{\pi}{3}\right)$

2) $D(1,-\sqrt{3})$

№5 **1)** $E\left(2,\frac{\pi}{2}\right)$

2) $E\left(6, \frac{\pi}{2}\right)$

№6 1) $F\left(4, \frac{2\pi}{3}\right)$

2) $F\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$

№7 1) $K\left(5, \frac{5\pi}{4}\right)$

2) $K\left(10, -\frac{\pi}{3}\right)$

№8 1) $L\left(1, \frac{\pi}{6}\right)$

2) $L\left(8, \frac{2\pi}{3}\right)$

№9 1) $M(6, \pi)$

2) $M\left(12, -\frac{\pi}{6}\right)$

№10 1) $N\left(3, \frac{5\pi}{6}\right)$

2) $N\left(5, \frac{\pi}{4}\right)$

№11 1) $O\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$

2) $O(1, \pi)$

№12 1) $P\left(6, \frac{3\pi}{4}\right)$

2) $P(5, 0)$

№13 1) $Q\left(1,\frac{3\pi}{2}\right)$

2) $Q\left(8,-\frac{\pi}{2}\right)$

№14 1) $R\left(4,\frac{7\pi}{6}\right)$

2) $R\left(1,\frac{3\pi}{4}\right)$

№15 1) $T\left(2,\frac{5\pi}{3}\right)$

2) $T\left(-3,\frac{5\pi}{4}\right)$

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется полярной системой координат?
2. Какие значения может принимать полярный радиус точки?
3. Какие значения может принимать полярный угол точки?
4. Что называется полюсом полярной системы координат?
5. Если полярный угол положителен, то в каком направлении откладывается от полярной оси луч?
6. Что называется прямоугольной декартовой системой координат?
7. Напишите формулы перехода от полярной системы координат к декартовой системе координат.
8. Напишите формулы перехода от декартовой системы координат к полярной системе координат.
9. Напишите формулу расстояния между двумя точками в полярной системе координат.
10. Каковы знаки координат точек в различных четвертях прямоугольной декартовой системы координат?

Понятие вектора. Операции над векторами

Отрезок называется направленным, если принимается во внимание порядок, в котором заданы его концы.

Вектор – направленный отрезок, имеющий длину и определенное направление.

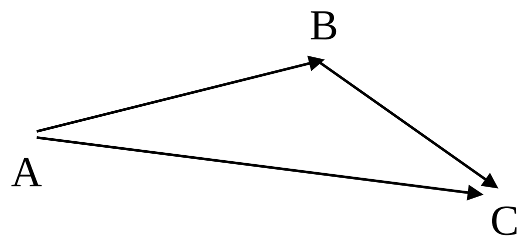
Векторы можно записать двумя большими латинскими буквами: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{KM}$ и т.д. (первая буква обозначает точку начало, вторя буква – точку конец вектора) или маленькими латинскими буквами: $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ и т.д.

Если точки A и B совпадают, то вектор $\overline{AB}$ (точнее $\overline{AA}$) называется нулевым или нуль-вектором и обозначается $\overline{0}$.

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются коллинеарными, если существует прямая, которой они параллельны. Запись $\overline{a} \parallel \overline{b}$ означает, что векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарные. Коллинеарные векторы могут $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ одинаково направлены или $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$ противоположно направлены. Нулевой вектор считается одинаково направленным с любым вектором.

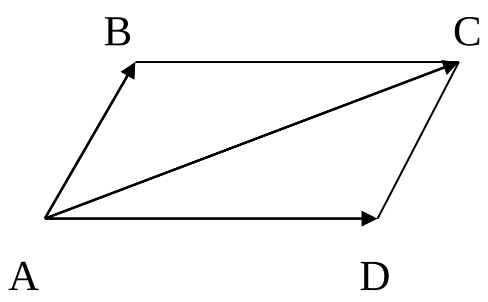
Два вектора равны, если они коллинеарны, сонаправлены и их длины равны.

Теперь введем операцию сложения двух векторов. Возьмем произвольные векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$. От какой-нибудь точки A отложим вектор $\overline{AB} = \overline{a}$, затем от точки B отложим вектор $\overline{BC} = \overline{b}$.



Вектор $\overline{AC} = \overline{c}$ называется суммой векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и обозначается $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$ или $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$. Это правило называется правилом треугольника.

Если слагаемые векторы не коллинеарны, то для получения их суммы применяют правило параллелограмма: $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}$.



Разность вводится как операция обратная сложению. Разностью векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется такой вектор $\overline{q}$, что $\overline{b} + \overline{q} = \overline{a}$.

Из правила треугольника следует, что $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$.

Произведением вектора $\overline{a}$ на действительное число α называется вектор p, удовлетворяющий условиям:

1. $|\overline{p}| = |\alpha||\overline{a}|$, где $|\alpha|$ – модуль числа α;
2. если $\alpha \geq 0$, то $\overline{p} \uparrow\uparrow \overline{a}$, если $\alpha < 0$, то $\overline{p} \uparrow\downarrow \overline{a}$.

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны и $\overline{a} \neq 0$, то существует единственное число α такое, что $\overline{b} = \alpha\overline{a}$.

Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ называются компланарными, если существует плоскость, которой они параллельны.

Если векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ компланарны, векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не коллинеарны, то существуют единственные числа α и β такие, что $\overline{c} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$.

Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называется линейно зависимой, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля и такие что

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_n\vec{a}_n = \overline{0}.$$

В противном случае система векторов называется линейно независимой.

Вектор

$$\vec{b} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_n\vec{a}_n$$

называется линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$, где $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – действительные числа.

Базисом векторного пространства называется такая система векторов, которая задана в определенном порядке и удовлетворяет условиям:

1. система линейно независима;
2. любой вектор пространства является линейной комбинацией данной системы векторов.

Пусть точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ заданы в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$, тогда длину (модуль) ненулевого вектора $\overline{AB}$ можно вычислить по формуле

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,.$$

Вектор, длина которого равна единице, называется единичным вектором или ортом.

Базис (i, j, k) называется ортонормированным, если векторы базиса единичные и взаимно перпендикулярные.

ПРИМЕР. Написать разложение вектора $\overline{p}(-3, 6, -13)$ по векторам $\overline{a}(1, 0, -2)$, $\overline{b}(1, -1, 3)$ и $\overline{c}(-2, 3, 0)$.

РЕШЕНИЕ. Тогда $\overline{p} = \alpha_1\overline{a} + \alpha_2\overline{b} + \alpha_3\overline{c}$:

$$\begin{cases} -3 = \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 \\ 6 = -\alpha_2 + 3\alpha_3 \\ -13 = -2\alpha_1 + 3\alpha_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = -3 \\ \alpha_3 = 1 \end{cases}.$$

Следовательно, $\overline{p} = 2\overline{a} - 3\overline{b} + \overline{c}$.

Задание. 1) Напишите разложение вектора $\overline{x}$ по векторам $\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}$.

2) Найдите координаты векторов $5\overline{a} - 2\overline{b}$, $-\frac{1}{2}\overline{a} + 3\overline{b}$, если

№1 **1)** $\overline{x} = (-2, 4, 7), \overline{p} = (0, 1, 2), \overline{q} = (1, 0, 1), \overline{r} = (-1, 2, 4)$.

2) $\overline{a}(-2,3,-1)$, $\overline{b}(4,-3,0)$

№2 **1)** $\overline{x} = (6, 12, -1), \overline{p} = (1, 3, 0), \overline{q} = \{2, -1, 1\}, \overline{r} = (0, -1, 2)$.

2) $\overline{a}(1,0,-5)$, $\overline{b}(-2,-4,-1)$

№3 **1)** $\overline{x} = (1, -4, 4), \overline{p} = (2, 1, -1), \overline{q} = (0, 3, 2), \overline{r} = (1, -1, 1)$.

2) $\overline{a}(4, -2, 5)$, $\overline{b}(2, -1, -1)$

№4 **1)** $\overline{x} = (-9, 5, 5), \overline{p} = (4, 1, 1), \overline{q} = (2, 0, -3), \overline{r} = (-1, 2, 1)$.

2) $\overline{a}(-8, 2, -6)$, $\overline{b}(1, 0, -9)$

№5 **1)** $\overline{x} = (-5, -5, 5), \overline{p} = (-2, 0, 1), \overline{q} = (1, 3, -1), \overline{r} = (0, 4, 1)$.

2) $\overline{a}(-10, -3, 6)$, $\overline{b}(-6, 0, 9)$

№6 **1)** $\overline{x} = (13, 2, 7), \overline{p} = (5, 1, 0), \overline{q} = (2, -1, 3), \overline{r} = (1, 0, -1)$.

2) $\overline{a}(0, 3, 3)$, $\overline{b}(6, -2, -4)$

№7 **1)** $\overline{x} = (-19, -1, 7), \overline{p} = (0, 1, 1), \overline{q} = (-2, 0, 1), \overline{r} = (3, 1, 0)$.

2) $\overline{a}(10, -1, -3)$, $\overline{b}(-6, 2, 4)$

№8 **1)** $\overline{x} = (3, -3, 4), \overline{p} = (1, 0, 2), \overline{q} = (0, 1, 1), \overline{r} = (2, -1, 4)$.

2) $\overline{a}(3, -2, -8)$, $\overline{b}(-5, 2, -5)$

№9 **1)** $\overline{x} = (3, 3, -1), \overline{p} = (3, 1, 0), \overline{q} = (-1, 2, 1), \overline{r} = (-1, 0, 2)$.

2) $\overline{a}(3, 12, 7)$, $\overline{b}(-1, -1, -1)$

№10 **1)** $\overline{x} = (-1, 7, -4), \overline{p} = (-1, 2, 1), \overline{q} = (2, 0, 3), \overline{r} = (1, 1, -1)$.

2) $\overline{a}(2, -2, -2)$, $\overline{b}(8, 4, -8)$

№11 **1)** $\vec{x} = \{6, 5, -14\}, \vec{p} = \{1, 1, 4\}, \vec{q} = \{0, -3, 2\}, \vec{r} = \{2, 1, -1\}$.

2) $\overline{a}(-1, -1, 0)$, $\overline{b}(2, 3, 4)$

№12 **1)** $\vec{x} = \{6, -1, 7\}, \vec{p} = \{1, -2, 0\}, \vec{q} = \{-1, 1, 3\}, \vec{r} = \{1, 0, 4\}$.

2) $\overline{a}(-6, -4, -2)$, $\overline{b}(-2, 3, -4)$

№13 **1)** $\vec{x} = \{5, 15, 0\}, \vec{p} = \{1, 0, 5\}, \vec{q} = \{-1, 3, 2\}, \vec{r} = \{0, -1, 1\}$.

2) $\overline{a}(1, 2, 3)$, $\overline{b}(-1, -2, -3)$

№14 **1)** $\overline{x} = (11, 5, -3), \overline{\mathrm{p}} = (1, 0, 2), \overline{\mathrm{q}} = (-1, 0, 1), \overline{\mathrm{r}} = (2, 5, -3)$.

2) $\overline{a}(1,-4,-10)$, $\overline{b}(-1,0,-1)$

№15 **1)** $\overline{x} = (2, -1, 11), \overline{\mathrm{p}} = (1, 1, 0), \overline{\mathrm{q}} = (0, 1, -2), \overline{\mathrm{r}} = (1, 0, 3)$.

2) $\overline{a}(0,4,8)$, $\overline{b}(12,2,-6)$

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется вектором?
2. Какие векторы называются коллинеарными?
3. Какие векторы называются компланарными?
4. Какой вектор называется ортом?
5. Какая система векторов называется линейно зависимой?
6. Какая система векторов называется линейно независимой?
7. Что называется базисом векторного пространства?
8. Какой базис называется ортонормированным?
9. Напишите условие коллинеарности двух векторов.
10. Напишите условие компланарности трех векторов.

Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов

Скалярным произведением двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\varphi,$$

где $\varphi = \angle(\overline{a}, \overline{b})$.

Если $\overline{a} = \overline{b}$, то $\varphi = 0^\circ$, $|\overline{a}| = |\overline{b}|$ и, следовательно, $\overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}|^2$, которое называется скалярным квадратом вектора $\overline{a}$.

Для любых ненулевых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, их скалярное произведение равно нулю

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = 0,$$

когда $\overline{a} \perp \overline{b}$.

Это справедливо и в том случае, когда хотя бы один из векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ нулевой, так как нуль-вектор перпендикулярен любому вектору.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, заданных в ортонормированном базисе, выражается формулой:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 .$$

ПРИМЕР 1. Найти $\cos\varphi$ между векторами $\overline{AB}(2, 2, 1)$ и $\overline{AC}(1, 4, 8)$.

РЕШЕНИЕ.

$$\cos\varphi = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{2+8+8}{\sqrt{4+4+1}\sqrt{1+16+64}} = -\frac{2}{3}.$$

Векторным произведением вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ называется третий вектор $\overline{c}$, определяемый следующим образом:

1) модуль вектора $\overline{c}$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$: $\overline{c} = \overline{a}\overline{b}\sin\varphi$;
2) вектор $\overline{c}$ перпендикулярен векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$;
3) векторы $\overline{c}$, $\overline{a}$ и $\overline{b}$ после приведения к общему началу ориентированы по отношению к друг другу как орты $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$.

Векторное произведение обозначается через $\overline{a} \times \overline{b}$.

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ в ортонормированном базисе имеют координаты $\overline{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\overline{b}(b_1, b_2, b_3)$, то вектор $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$ имеет координаты:

$$\vec{c}\left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

Смешанное произведение трех векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Если векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ в ортонормированном базисе имеют координаты $\overline{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\overline{b}(b_1, b_2, b_3)$ и $\overline{c}(c_1, c_2, c_3)$, то

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \varepsilon \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

где $\varepsilon = 1$, если базис правый и $\varepsilon = -1$, если базис левый.

Базис называется правым, если кратчайший поворот от одного вектора ко второму происходит против часовой стрелки. В противном случае базис называется левым.

Смешанным произведением векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ называется скалярное произведение вектора $\overline{a} \times \overline{b}$ на вектор $\overline{c}$: $(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c}$. Эта формула устанавливает связь между смешанным, векторным и скалярным произведениями векторов.

ПРИМЕР 2. Вычислить объем тетраэдра, если даны координаты его вершин $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ и $D(x_4, y_4, z_4)$.

РЕШЕНИЕ. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$ вычисляется по формуле:

$$V = \left| \overline{AB}\, \overline{AC}\, \overline{AD} \right|.$$

Отсюда следует, что объем тетраэдра вычисляется по формуле:

$$V = \frac{1}{6} \left| \overline{AB}\, \overline{AC}\, \overline{AD} \right|$$

или

$$V = \frac{1}{6} \left\| \begin{matrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{matrix} \right\|.$$

Задание. 1) Найдите косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

2) Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

3) Вычислите объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

№1

1) $A(1,\ -2,\ 3),\ \ B(0,\ -1,\ 2),\ \ \ C(3,\ \ -4,\ \ 5).$

2) $\overline{a} = \overline{p} + 2\overline{q},\ \ \overline{b} = 3\overline{p} - \overline{q};\ \ |\overline{p}| = 1,\ |\overline{q}| = 2,\ \angle(\overline{p}, \overline{q}) = \dfrac{\pi}{6}.$

3) $A_1(1,\ 3,\ 6),\ \ A_2(2,\ 2,\ 1),\ \ \ A_3(-1,\ \ 0,\ \ 1),\ \ \ A_4(-4,\ \ 6,\ \ -3).$

№2

1) $A(0,\ -3,\ 6),\ \ B(-12,\ -3,\ -3),\ \ \ C(-9,\ \ -3,\ \ -6).$

2) $\overline{a} = 3\overline{p} + \overline{q},\ \ \overline{b} = \overline{p} - 2\overline{q};\ \ |\overline{p}| = 4,\ \ |\overline{q}| = 1,\ \angle(\overline{p}, \overline{q}) = \dfrac{\pi}{4}.$

3) $A_1(-4,\ 2,\ 6),\ A_2(2,\ -3,\ 0),\ \ \ A_3(-10,\ \ 5,\ \ 8),\ \ A_4(-5,\ \ 2,\ \ -4).$

№3

1) $A(3,\ 3,\ -1),\ \ B(5,\ 5,\ -2),\ \ \ C(4,\ \ 1,\ \ 1).$

2) $\overline{a} = \overline{p} - 3\overline{q}, \overline{b} = \overline{p} + 2\overline{q}; |\overline{p}| = \dfrac{1}{5},\ \ |\overline{q}| = 1,\ \ \angle(\overline{p}, \overline{q}) = \dfrac{\pi}{2}.$

3) $A_1(7,\ 2,\ 4),\ \ A_2(7,\ -1,\ -2),\ \ \ A_3(3,\ \ 3,\ \ 1),\ \ A_4(-4,\ \ 2,\ \ 1).$

№4

1) $A(-1,\ 2,\ -3),\ \ B(3,\ 4,\ -6),\ \ \ C(1,\ \ 1,\ \ -1).$

2) $\overline{a} = 3\overline{p} - 2\overline{q}, \overline{b} = \overline{p} + 5\overline{q};\ \ |\overline{p}| = 4, |\overline{q}| = \dfrac{1}{2},\ \ \angle(\overline{p}, \overline{q}) = \dfrac{5\pi}{6}.$

3) $A_1(2,\ 1,\ 4), A_2(-1,\ 5,\ -2), A_3(-7,\ \ -3,\ \ 2), A_4(-6,\ \ -3,\ \ 6).$

№5

1) $A(-4,\ -2,\ 0),\ \ B(-1,\ -2,\ 4),\ \ \ C(3,\ \ -2,\ \ 1).$

2) $\overline{a} = \overline{p} - 2\overline{q}, \overline{b} = 2\overline{p} + \overline{q};\ \ |\overline{p}| = 2, |\overline{q}| = 3, \angle(\overline{p}, \overline{q}) = \dfrac{3\pi}{4}.$

3) $A_1(-1,\ -5,\ 2), A_2(-6,\ 0,\ -3), A_3(3,\ 6, -3),\ \ A_4(-10,\ 6, 7).$

№6

1) $A(5,\ 3,\ -1),\ \ B(5,\ 2,\ 0),\ \ \ C(6,\ \ 4,\ \ -1).$

2) $\overline{a}=\overline{p}+3\overline{q},\ \overline{b}=\overline{p}-2\overline{q};\ |\overline{p}|=2,\ |\overline{q}|=3,\ \angle(\overline{p},\overline{q})=\dfrac{\pi}{3}.$

3) $A_1(0,-1,-1),\ \ A_2(-2,3,5),\ \ \ A_3(1,-5,-9),\ \ \ A_4(-1,-6,3).$

№7

1) $A(-3,\ -7,\ -5),\ \ B(0,\ -1,\ -2),\ \ \ C(2,\ \ 3,\ \ 0).$

2) $\overline{a}=2\overline{p}-\overline{q},\ \overline{b}=\overline{p}+3\overline{q};\ |\overline{p}|=3,\ |\overline{q}|=2,\ \angle(\overline{p},\overline{q})=\dfrac{\pi}{2}.$

3) $A_1(5,\ 2,\ 0),\ \ A_2(2,\ 5,\ 0),\ \ \ A_3(1,\ \ 2,\ \ 4),\ \ \ A_4(-1,\ \ 1,\ \ 1).$

№8

1) $A(2,\ -4,\ 6),\ \ B(0,\ -2,\ 4),\ \ \ C(6,\ \ -8,\ \ 10).$

2) $\overline{a}=4\overline{p}+\overline{q},\ \overline{b}=\overline{p}-\overline{q};\ |\overline{p}|=7,\ |\overline{q}|=2,\ \angle(\overline{p},\overline{q})=\dfrac{\pi}{4}.$

3) $A_1(2,-1,-2),\ \ A_2(1,2,1),\ \ \ A_3(5,0,-6),\ \ \ A_4(-10,9,-7).$

№9

1) $A(0,\ 1,\ -2),\ \ B(3,\ 1,\ 2),\ \ \ C(4,\ \ 1,\ \ 1).$

2) $\overline{a}=\overline{p}-4\overline{q},\ \overline{b}=3\overline{p}+\overline{q};\ |\overline{p}|=1,\ |\overline{q}|=2,\ \angle(\overline{p},\overline{q})=\dfrac{\pi}{6}.$

3) $A_1(-2,0,-4),\ \ A_2(-1,7,1),\ \ \ A_3(4,-8,-4),\ \ \ A_4(1,-4,6).$

№10

1) $A(3,\ 3,\ -1),\ \ B(1,\ 5,\ -2),\ \ \ C(4,\ \ 1,\ \ 1).$

2) $\overline{a}=\overline{p}+4\overline{q},\ \overline{b}=2\overline{p}-\overline{q};\ |\overline{p}|=7,\ |\overline{q}|=2,\ \angle(\overline{p},\overline{q})=\dfrac{\pi}{3}.$

3) $A_1(14,4,5),\ \ A_2(-5,-3,2),\ \ \ A_3(-2,-6,-3),\ \ \ A_4(-2,2,-1).$

№11

1) $A(2,\ 1,\ -1),\ \ B(6,\ -1,\ -4),\ \ \ C(4,\ \ 2,\ \ 1).$

2) $\overline{a}=3\overline{p}+2\overline{q},\ \overline{b}=\overline{p}-\overline{q};\ |\overline{p}|=10,\ |\overline{q}|=1,\ \angle(\overline{p},\overline{q})=\dfrac{\pi}{2}.$

3) $A_1(1,\ 2,\ 0),\ \ A_2(3,\ 0,\ -3),\ \ \ A_3(5,\ \ 2,\ \ 6),\ \ \ A_4(8,\ \ 4,\ \ -9).$

№12

1) $A(-1,\ -2,\ 1),\ \ B(-4,\ -2,\ 5),\ \ \ C(-8,\ \ -2,\ \ 2).$

2) $\overline{a}=4\overline{p}-\overline{q},\ \overline{b}=\overline{p}+2\overline{q};\ |\overline{p}|=5,\ |\overline{q}|=4,\ \angle(\overline{p},\overline{q})=\dfrac{\pi}{4}.$

3) $A_1(2,\ -1,\ 2),\ \ A_2(1,\ 2,-1),\ \ \ A_3(3,\ \ 2,\ \ 1),\ \ A_4(-4,\ \ 2,\ \ 5).$

№13

1) $A(6,\ 2,\ -3),\ \ B(6,\ 3,\ -2),\ \ \ C(7,\ \ 3,\ \ -3).$

2) $\overline{a}=2\overline{p}+3\overline{q},\ \overline{b}=\overline{p}-2\overline{q};\ |\overline{p}|=6,\ |\overline{q}|=7,\ \angle(\overline{p},\overline{q})=\dfrac{\pi}{3}.$

3) $A_1(1,\ 1,\ 2),\ \ A_2(-1,\ 1,\ 3),\ \ \ A_3(2,\ \ -2,\ \ 4),\ \ A_4(-1,\ \ 0,\ \ -2).$

№14

1) $A(0,\ 0,\ 4),\ \ B(-3,\ -6,\ 1),\ \ \ C(-5,\ \ -10,\ \ -1).$

2) $\overline{a}=3\overline{p}-\overline{q},\ \ \overline{b}=\overline{p}+2\overline{q};\ |\overline{p}|=3,\ |\overline{q}|=4,\ \angle(\overline{p},\overline{q})=\dfrac{\pi}{3}.$

3) $A_1(1,\ 1,\ -1),\ \ A_2(2,\ 3,\ 1),\ \ \ A_3(3,\ \ 2,\ \ 1),\ \ A_4(5,\ \ 9,\ \ -8).$

№15

1) $A(2,\ -8,\ -1),\ \ B(4,\ -6,\ 0),\ \ \ C(-2,\ \ -5,\ \ -1).$

2) $\overline{a}=2\overline{p}+3\overline{q},\ \overline{b}=\overline{p}-2\overline{q};\ |\overline{p}|=2,\ |\overline{q}|=3,\ \angle(\overline{p},\overline{q})=\dfrac{\pi}{4}.$

3) $A_1(2,\ 3,\ 1),\ \ A_2(4,\ 1,\ -2),\ \ \ A_3(6,\ \ 3,\ \ 7),\ \ A_4(7,\ \ 5,\ \ -3).$

Вопросы для самоконтроля:

1. Напишите формулы скалярного произведения векторов.
2. Напишите формулы векторного произведения векторов.
3. Напишите формулы смешанного произведения векторов.
4. Что называется скалярным произведением векторов?
5. Что называется векторным произведением векторов?
6. Какая формула устанавливает связь между скалярным, векторным и смешанным произведениями векторов?
7. Как вычисляется объем тетраэдра?
8. Когда скалярное произведение равно нулю?
9. Какой базис называется правым?
10. В чем разница скалярного и векторного произведения?

Различные способы задания прямой на плоскости

Если на плоскости выбрана система координат, то прямая может быть задана одним из следующих способов:

1) начальной точкой $M_0(x_0, y_0)$ и направляющим вектором $\overline{p}(p_1, p_2)$:

$$p_2(x - x_0) - p_1(y - y_0) = 0.$$

Всякий ненулевой вектор, параллельный данной прямой, называется направляющим вектором. Любые два направляющих вектора одной и той же прямой коллинеарны между собой.

2) двумя различными точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Если в прямоугольной декартовой системе координат заданы точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, то числа (x_1, y_1) и (x_2, y_2) однозначно характеризуют положение прямой на плоскости.

3) длинами a, b направленных отрезков, отсекаемых на осях координат (прямая не проходит через начало координат):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

4) точкой $M_0(x_0, y_0)$ и угловым коэффициентом k:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Угловой коэффициент прямой – тангенс угла наклона заданной прямой:

$$k = tg\alpha.$$

Прямые, параллельные оси Oy, не имеют углового коэффициента.

Уравнение любой прямой является уравнением первой степени, т.е. оно может быть записано в виде:

$$Ax + By + C = 0,$$

где $A \neq 0$ и $B \neq 0$ одновременно. Это уравнение называется общим уравнением прямой.

ПРИМЕР. Треугольник ABC задан координатами вершин $A(-4, 5)$, $B(4, 1)$ и $C\left(-\frac{1}{2}, 7\right)$. Найти уравнения:

а) биссектрисы внутреннего угла A;
б) медианы, проходящей через точку A;
в) высоты, опущенной из вершины C.

РЕШЕНИЕ. Пусть AA_1 – биссектриса внутреннего угла A; AA_2 – медиана, проходящая через точку A; CH – высота, опущенная из вершины C.

а) Уравнение биссектрисы AA_1 можно найти как уравнение прямой проходящей через две точки. Координаты точки $A(-4, 5)$ известны, найдем координаты точки $A_1(x, y)$:

$$x = \frac{x_B + \lambda\, x_C}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_B + \lambda\, y_C}{1 + \lambda}.$$

$$\frac{\left|\overline{AB}\right|}{\left|\overline{AC}\right|} = \frac{\left|\overline{BA_1}\right|}{\left|\overline{A_1C}\right|} = \lambda,$$

$$\overline{AB}(8, 6), \ \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10,$$

$$\overline{AC}\left(\frac{7}{2}, 12\right), \ \left|\overline{AC}\right| = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 12^2} = \sqrt{\frac{625}{4}} = \frac{25}{2}.$$

Следовательно, .

, .

Итак, точка .

Тогда уравнение прямой можно найти, используя формулу уравнения прямой, проходящей через две точки:

,

.

б) Так как – медиана, то точка делит сторону пополам, т.е.

, .

Тогда точка и уравнение прямой можно найти, используя формулу уравнения прямой, проходящей через две точки:

,

.

в) Координаты точек и известны, поэтому можно найти уравнение прямой :

,

,

Так как – высота, то . Следовательно,

;

,

,

.

Таким образом, уравнение биссектрисы внутреннего угла , уравнение медианы, проходящей через точку и уравнение высоты, опущенной из вершины .

Задание. **1)** Даны вершины треугольника. Составьте уравнение высоты треугольника, проведенной из вершины .

2) Даны вершины треугольника. Найдите уравнения прямых, которые проходят через вершины треугольника и параллельны его сторонам.

№1 .

№2 .

№3 .

№4 .

№5 .

№6 .

№7 .

№8 .

№9 .

№10 .

№11 .

№12 .

№13 .

№14 .

№15 .

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется направляющим вектором прямой?
2. Какую величину называют угловым коэффициентом?
3. Напишите формулу прямой, проходящей через две точки.
4. Напишите формулу прямой, проходящей через начальную точку и угловой коэффициент.
5. Чему равен угловой коэффициент прямой, параллельной оси ?
6. Напишите уравнение прямой в отрезках.

7. Напишите формулу, по которой вычисляются координаты точки, делящей направленный отрезок в отношении .
8. Существует ли точка, делящая отрезок в отношении ?
9. Запишите общее уравнение прямой.
10. Напишите формулу прямой, заданную начальной точкой и направляющим вектором.

Взаимное расположение двух прямых, угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой

Пусть в прямоугольной декартовой системе координат даны две прямые

,

.

Возможны три случая:

1. Прямые и пересекаются тогда и только тогда, когда коэффициенты при не пропорциональны.

Если прямые пересекаются, т.е. имеют одну общую точку, то координаты этой точки должны удовлетворять обоим уравнениям прямых.

2. Прямые и совпадают тогда и только тогда, когда все коэффициенты в уравнениях пропорциональны, т.е. существует такое число , что

, , .

3. Прямые и параллельны тогда и только тогда, когда коэффициенты при пропорциональны, но свободные члены им не пропорциональны, т.е. существует такое число , что

, , .

Если прямая и точка , не принадлежащая этой прямой, заданы в прямоугольной декартовой системе координат, то расстояние от точки до прямой можно вычислить по формуле:

.

ПРИМЕР 1. Найти расстояние от точки до прямой .

РЕШЕНИЕ.

.

Если две прямые заданы уравнениями $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$, то угол между ними можно вычислить по формуле:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Если прямые параллельны, то $k_1 = k_2$. Верно и обратное, если $k_1 = k_2$, то прямые параллельны.

Если прямые перпендикулярны, то $k_2 = -\frac{1}{k_1}$. Верно и обратное, если $k_2 = -\frac{1}{k_1}$, то прямые перпендикулярны.

ПРИМЕР 2. Определить угол между прямыми $y = 3x + 7$ и $y = -2x + 1$.

РЕШЕНИЕ. Полагая $k_1 = 3$, $k_2 = -2$, получим

$$tg\varphi = \frac{-2 - 3}{1 + 3 \cdot (-2)} = 1,$$

т.е. .

Если две прямые заданы уравнениями и , то угол между ними можно вычислить по формуле:

.

Задание. 1) Найдите расстояние от заданной точки до прямой, проходящей через точки и .

2) Определите угол между прямыми.

№1 **1)** $M_1(-3,\ 4),\ \ M_2(1,\ 5),\ \ M_0(-12,\ \ 7).$

2) $3x+y-7=0,\ -2x+y-1=0$.

№2 **1)** $M_1(-1,\ 2),\ \ M_2(4,\ -1),\ \ M_0(1,\ \ -6).$

2) $x-4y+7=0,\ -5x+6y-4=0$.

№3 **1)** $M_1(-3,\ -1),\ \ M_2(-9,\ 1),\ \ M_0(-7,\ \ 0).$

2) $-6x+10y-5=0,\ -x+4y+1=0$.

№4 **1)** $M_1(1,\ -1),\ \ M_2(-2,\ 0),\ \ M_0(-2,\ \ 4).$

2) $x+y-17=0,\ 2x+6y+5=0$.

№5 **1)** $M_1(1,\ 2),\ \ M_2(1,\ -1),\ \ M_0(2,\ \ -1).$

2) $3x-5y+7=0,\ 10x+6y-3=0$.

№6 **1)** $M_1(1,\ 0),\ \ M_2(1,\ 2),\ \ M_0(-5,\ \ -9).$

2) $3x-2y+1=0,\ 2x+5y-12=0$.

№7 **1)** $M_1(1,\ 2),\ \ M_2(1,\ 0),\ \ M_0(3,\ \ -2).$

2) $4x-y-2=0,\ 6x+8y-35=0$.

№8 **1)** $M_1(3,\ 10),\ \ M_2(-2,\ 3),\ \ M_0(-6,\ \ 7).$

2) $x+y-5=0,\ 7x-y-19=0$.

№9 **1)** $M_1(-1,\ 2),\ \ M_2(-1,\ -2),\ \ M_0(-2,\ \ 3)$.
2) $9x-3y-4=0,\ \ x+y-2=0$.

№10 **1)** $M_1(0,\ -3),\ \ M_2(-4,\ 1),\ \ M_0(-3,\ \ 4)$.
2) $11x+y-2=0,\ \ x-5y+14=0$.

№11 **1)** $M_1(1,\ 3),\ \ M_2(4,\ -1),\ \ \ M_0(4,\ \ 3)$.
2) $3x+y-7=0,\ -2x+y-1=0$.

№12 **1)** $M_1(-2,\ -1),\ \ M_2(0,\ 3),\ \ \ M_0(-21,\ \ 20)$.
2) $3x+4y-20=0,\ \ 8x+6y-5=0$.

№13 **1)** $M_1(-3,\ -5),\ \ M_2(2,\ 1),\ \ \ M_0(3,\ \ 6)$.
2) $-3x-2y-1=0,\ \ x-2y+1=0$.

№14 **1)** $M_1(2,\ -4),\ \ M_2(5,\ -6),\ \ \ M_0(2,\ \ -10)$.
2) $-x+9y-4=0,\ \ 2x+5y-1=0$.

№15 **1)** $M_1(1,\ -1),\ \ M_2(2,\ 1),\ \ \ M_0(-3,\ \ 2)$.
2) $3x+5y-7=0,\ -2x+3y-11=0$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Напишите условие параллельности двух прямых.
2. Напишите условие совпадения двух прямых.
3. Напишите формулу расстояния от точки до прямой.
4. По какой формуле вычисляется угол между двумя прямыми?
5. Две прямые на плоскости могут иметь две общие точки?
6. Как называются прямые, которые образуют прямые углы при пересечении?
7. Каким может быть расположение двух прямых на плоскости?

8. Что такое расстояние от точки до прямой?
9. По какой формуле вычисляется угол между двумя прямыми, заданными общими уравнениями?
10. При каком условии прямые пересекаются?

Кривые второго порядка

Эллипс – множество точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная, равная $2a$.

Точки $F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$ называются фокусами эллипса, отрезок $F_1F_2 = 2c$ – фокальным расстоянием.

Если точки F_1 и F_2 совпадают, то эллипс является окружностью.

В декартовой системе координат эллипс имеет следующее каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b^2 = a^2 - c^2$.

Эллипс имеет четыре вершины: $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$, $B_1(0,b)$, $B_2(0,-b)$.

Отрезки A_1A_2 и B_1B_2 называются осями эллипса; отрезок $A_1A_2 = 2a$ – большая ось, отрезок $B_1B_2 = 2b$ – малая ось.

Эксцентриситетом эллипса называется число

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \quad 0 \le \varepsilon < 1.$$

Эксцентриситет характеризует степень сжатия эллипса:

$$\frac{b}{a}=\sqrt{1-\varepsilon^2}\,.$$

$\varepsilon, a, b, 2c$ – параметры, которые полностью определяют эллипс с центром в начале координат.

ПРИМЕР 1. Составить каноническое уравнение эллипса, если $a=3$ и $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

РЕШЕНИЕ. Из формулы $\varepsilon=\frac{c}{a}$ получим, что $c=\sqrt{5}$. Тогда $b=\sqrt{a^2-c^2}$, $b=2$. Следовательно,

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

является каноническим уравнением эллипса.

Гипербола – множество всех точек плоскости, абсолютное значение разности расстояний каждой из которых до данных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная, равная $2a$.

Точки $F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$ называются фокусами гиперболы, отрезок $F_1F_2=2c$ – фокальным расстоянием.

В декартовой системе координат гипербола имеет следующее каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $b^2=c^2-a^2$.

Гипербола имеет две вершины: $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$.

Отрезок $A_1A_2=2a$ называется действительной осью гиперболы, отрезок $B_1B_2=2b$ – мнимой.

Прямые проходящие через начало координат и имеющие угловые коэффициенты $k_1=\frac{b}{a}$ и $k_2=-\frac{b}{a}$ называются асимптотами гиперболы: $y=\frac{b}{a}x$ и $y=-\frac{b}{a}x$.

Эксцентриситетом гиперболы называется число

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \quad \varepsilon > 1.$$

Эксцентриситет характеризует степень сжатия гиперболы:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}, \quad tg\alpha = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

Гипербола, полуоси которой равны $a = b$, называется равносторонней. Ее каноническое уравнение имеет вид:

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

ПРИМЕР 2. Составить уравнение гиперболы, имеющей общие фокусы с эллипсом $\frac{x^2}{35} + \frac{y^2}{10} = 1$ и проходящей через точку $M(4\sqrt{2}, 3)$.

РЕШЕНИЕ. Из заданного уравнения эллипса $\frac{x^2}{35} + \frac{y^2}{10} = 1$ имеем $a^2 = 35$, $b^2 = 10$. Тогда $c = \sqrt{35 - 10} = 5$, следовательно, фокусы эллипса и гиперболы имеют координаты: $F_1(5, 0)$ и $F_2(-5, 0)$.

Так как точка $M(4\sqrt{2}, 3)$ принадлежит гиперболе, то ее координаты удовлетворяют уравнению гиперболы:

$$\frac{32}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1.$$

Подставив замену $b^2 = 25 - a^2$ в уравнение гиперболы, получим:

.

,

отсюда , . Тогда .

Итак,

есть каноническое уравнение гиперболы.

Парабола – множество всех точек плоскости, расстояние каждой из которых до данной точки равно расстоянию до данной прямой , не проходящей через точку .

Точка называется фокусом параболы, прямая – директрисой.

Расстояние от фокуса до директрисы называется фокальным параметром и обозначается через .

Директриса параболы имеет уравнение вида:

.

В декартовой системе координат парабола имеет следующее каноническое уравнение:

.

Точка называется вершиной параболы.

Эксцентриситет любой параболы равен 1.

ПРИМЕР 3. Составить каноническое уравнение параболы, если директриса задана уравнением .

РЕШЕНИЕ. Так как директриса задана уравнением , то . Следовательно, каноническое уравнение параболы имеет вид: .

Задание.

Составить каноническое уравнение эллипса, если:

№1 эллипс проходит через точку и имеет эксцентриситет .

№2 эллипс проходит через точки и .

№3 , , .

№4 , , .

Составить каноническое уравнение гиперболы, если:

№5 гипербола проходит через точки и .

№6 гипербола проходит через точку и .

№7 гипербола имеет асимптоты и директрисы .

№8 гипербола равнобочная и проходит через точку .

№9 угол между асимптотами равен и гипербола проходит через точку .

Составить каноническое уравнение параболы, если:

№10 парабола симметрична относительно оси и проходит через точку .

№11 парабола симметрична относительно оси и проходит через точку .

№12 парабола симметрична относительно оси , длина некоторой хорды этой параболы, перпендикулярной оси , равна 16, а расстояние этой хорды от вершины равно 6.

№13 фокус параболы находится в точке пересечения прямой с осью .

№14 парабола симметрична относительно оси и отсекает на биссектрисе I и III координатных углов хорду длиной .

№15 парабола симметрична относительно оси и отсекает от прямой хорду длиной .

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется эллипсом?
2. Что называется гиперболой?
3. Что называется параболой?
4. Что характеризует эксцентриситет эллипса?
5. Напишите уравнения асимптот гиперболы.
6. Напишите каноническое уравнение параболы.
7. Сколько вершин имеет эллипс?
8. Что называется фокальным параметром параболы?
9. Напишите каноническое уравнение гиперболы.
10. Напишите каноническое уравнение эллипса.

Различные способы задания плоскости в пространстве. Угол между плоскостями. Расстояние от точки до плоскости

Плоскость можно задать одним из следующих способов:

1) уравнение плоскости, заданной точкой и направляющим

подпространством:

,

где – начальная точка, – направляющие векторы из направляющего подпространства.

Множество векторов, параллельных плоскости, образуют направляющее подпространство плоскости.

2) уравнение плоскости, заданной тремя точками , и , не лежащими на одной прямой:

.

3) уравнение плоскости, заданной точкой и перпендикулярным вектором:

,

где , .

Говорят, что вектор перпендикулярен плоскости, если он перпендикулярен любому вектору из направляющего подпространства плоскости.

Любая плоскость есть поверхность первого порядка:

,

где , и одновременно. Это есть общее уравнение плоскости.

ПРИМЕР. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно вектору $\overline{KN}$, если $M(-1, 2, 5)$, $N(0, -4, 5)$, $K(-3, 2, 1)$.

РЕШЕНИЕ. Так как вектор $\overline{KN}$ перпендикулярен плоскости, то

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

где $M(x_0,y_0,z_0)$, $\overline{KN}(A,B,C)$. Найдем координаты вектора $\overline{KN}(-3,6,-4)$. Тогда

$$-3(x+1)+6(y-2)-4(z-5)=0,$$

$$3x-6y+4z-5=0.$$

Если в прямоугольной системе координат заданы две пересекающиеся плоскости

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

то угол между ними можно вычислить по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Если плоскости перпендикулярны, то $Ap_1+Bp_2+Cp_3\neq 0$.

Верно и обратное, если $Ap_1+Bp_2+Cp_3\neq 0$, то плоскости перпендикулярны.

ПРИМЕР. Найти угол между плоскостями $6x-3z+2=0$ и $2x+5y+4z+15=0$.

РЕШЕНИЕ.

$$\cos\varphi=\frac{6\cdot 2+0\cdot 5+(-3)\cdot 4}{\sqrt{36+9}\sqrt{4+25+16}}=0,$$

т.е. $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$.

Если в прямоугольной системе координат задана плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, не лежащая в этой плоскости, то расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости можно вычислить по формуле:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

ПРИМЕР. Найти расстояние от точки $M_0(1, 2, 0)$ до плоскости, проходящей через три точки $M_1(1, 2, 3)$, $M_2(2, 1, 3)$ и $M_3(0, -1, 2)$.

РЕШЕНИЕ. Найдем сначала уравнение плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

$$x-1-3(z-3)-(z-3)+y-2=x+y-4z+9,$$

$$x+y-4z+9=0.$$

Теперь найдем расстояние от точки до плоскости:

$$d=\frac{|1+2+9|}{\sqrt{1+1+16}}=\frac{12}{\sqrt{18}}=\frac{12}{3\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}.$$

Задание. 1) Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\overline{BC}$.

2) Найдите угол между плоскостями.

3) Найдите расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через три заданные точки M_1, M_2, M_3.

№1 **1)** $A(1,\ 0,\ -21),\ \mathrm{B}(2,\ -1,\ 3),\ \mathrm{C}(0,\ -3,\ 2)$.

2) $x-3y+5=0, 2x-y+5z-16=0$.

3) $M_1(1, -1, 2),\ \mathrm{M}_2(2, 1, 2),\ \mathrm{M}_3(1, 1, 4),\ \mathrm{M}_0(-3, 2, 7)$.

№2 1) $A(-1,\ 3,\ 4),\ \ \mathrm{B}(\text{-}1,\ 5,\ 0),\ \ \ \mathrm{C}(2,\ \ 6,\ \ 1).$

2) $4x-5y+3z-1=0,\ x-4y-z+9=0$.

3) $M_1(1,3,6),\ \mathrm{M}_2(2,2,1),\ \ \mathrm{M}_3(\text{-}1,0,1),\ \ \mathrm{M}_0(5,\text{-}4,5).$

№3 1) $A(4,\ \text{-}2,\ 0),\ \ \mathrm{B}(1,\ \text{-}1,\ \text{-}5),\ \ \ \mathrm{C}(\text{-}2,\ \ 1,\ \ \text{-}3).$

2) $x-3y+z-1=0,\ x+z-1=0$.

3) $M_1(-4,2,6),\mathrm{M}_2(2,\text{-}3,0),\mathrm{M}_3(\text{-}10,5,8),\mathrm{M}_0(\text{-}12,1,8).$

№4 1) $A(-8,\ 0,\ 7),\ \ \mathrm{B}(\text{-}3,\ 2,\ 4),\ \ \ \mathrm{C}(\text{-}1,\ \ 5,\ \ 5).$

2) $3x-y+2z+15=0,\ 5x+9y-3z-1=0$.

3) $M_1(7,2,4),\mathrm{M}_2(7,\text{-}1,\text{-}2),\mathrm{M}_3(\text{-}5,\text{-}2,\text{-}1),\mathrm{M}_0(10,1,8).$

№5 1) $A(7,\ \text{-}5,\ 1),\ \ \mathrm{B}(5,\ \text{-}1,\ \text{-}3),\ \ \ \mathrm{C}(3,\ \ 0,\ \ \text{-}4).$

2) $6x+2y-4z+17=0,\ 9x+3y-6z-4=0$.

3) $M_1(2,1,4),\ \mathrm{M}_2(3,5,\text{-}2),\ \ \mathrm{M}_3(\text{-}7,\text{-}3,2),\ \ \mathrm{M}_0(\text{-}3,1,8).$

№6 1) $A(-3,\ 5,\ \text{-}2),\ \ \mathrm{B}(\text{-}4,\ 0,\ 3),\ \ \ \mathrm{C}(\text{-}3,\ \ 2,\ \ 5).$

2) $3y-z=0,\ 2y+z=0$.

3) $M_1(-1,\text{-}5,2),\mathrm{M}_2(\text{-}6,0,\text{-}3),\mathrm{M}_3(3,6,\text{-}3),\mathrm{M}_0(10,\text{-}8,\text{-}7).$

№7 1) $A(1,\ \text{-}1,\ 8),\ \ \mathrm{B}(\text{-}4,\ \text{-}3,\ 10),\ \ \ \mathrm{C}(\text{-}1,\ \ \text{-}1,\ \ 7).$

2) $x-y\sqrt{2}+z-1=0,\qquad x+y\sqrt{2}-z+3=0.$

3) $M_1(0,\text{-}1,\text{-}1),\mathrm{M}_2(\text{-}2,3,5),\mathrm{M}_3(1,\text{-}5,\text{-}9),\mathrm{M}_0(\text{-}4,\text{-}13,6).$

№8 1) $A(-2,\ 0,\ \text{-}5),\ \ \mathrm{B}(2,\ 7,\ \text{-}3),\ \ \ \mathrm{C}(1,\ \ 10,\ \ \text{-}1).$

2) $6x+3y-2z=0,\ x+2y+6z-12=0$.

3) $M_1(5,2,0),\mathrm{M}_2(2,5,0),\mathrm{M}_3(1,2,4),\ \mathrm{M}_0(\text{-}3,\text{-}6,\text{-}8).$

№9 1) $A(1,\ 9,\ \text{-}4),\ \ \mathrm{B}(5,\ 7,\ 1),\ \ \ \mathrm{C}(3,\ \ 5,\ \ 0).$

2) $x+2y+2z-3=0,16x+12y-15z-1=0$.

3) $M_1(2,\text{-}1,\text{-}2),\mathrm{M}_2(1,2,1),\ \mathrm{M}_3(5,0,\text{-}6),\ \mathrm{M}_0(14,\text{-}3,7).$

№10 1) $A(-7,\ 0,\ 3),\ \ \mathrm{B}(1,\ \text{-}5,\ \text{-}4),\ \ \mathrm{C}(2,\ \ \text{-}3,\ \ 0).$

2) $2x + 2y + z - 1 = 0,\ x + z - 1 = 0$.

3) $M_1(-2,0,-4), \mathrm{M}_2(-1,7,1),\ \mathrm{M}_3(4,-8,-4), \mathrm{M}_0(-6,5,5)$.

№11 1) $A(0,\ -3,\ 5),\ \ \mathrm{B}(-7,\ 2,\ 6),\ \ \mathrm{C}(-3,\ \ 2,\ \ 4)$.

2) $2x - y + 5z + 16 = 0,\ x + 2y + 3z + 8 = 0$.

3) $M_1(14,4,5), \mathrm{M}_2(-5,-3,2),\ \mathrm{M}_3(-2,-6,-3),\ \mathrm{M}_0(-1,-8,7)$.

№12 1) $A(5,\ -1,\ 2),\ \ \mathrm{B}(2,\ -4,\ 3),\ \ \mathrm{C}(4,\ \ -1,\ \ 3)$.

2) $3x + y + z - 4 = 0,\ y + z + 5 = 0$.

3) $M_1(1,2,0), \mathrm{M}_2(3,0,-3), \mathrm{M}_3(5,2,6), \mathrm{M}_0(-13,-8,16)$.

№13 1) $A(-3,\ 7,\ 2),\ \ \mathrm{B}(3,\ 5,\ 1),\ \ \mathrm{C}(4,\ \ 5,\ \ 3)$.

2) $3x - 2y - 2z - 16 = 0,\ x + y - 3z - 7 = 0$.

3) $M_1(2,-1,2), \mathrm{M}_2(1,2,-1), \mathrm{M}_3(3,2,1), \mathrm{M}_0(-5,3,7)$.

№14 1) $A(0,\ -2,\ 8),\ \ \mathrm{B}(4,\ 3,\ 2),\ \ \mathrm{C}(1,\ \ 4,\ \ 3)$.

2) $x + 2y + 2z - 3 = 0,\ 2x - y + 2z + 5 = 0$.

3) $M_1(2,3,1), \mathrm{M}_2(4,1,-2), \mathrm{M}_3(6,3,7), \mathrm{M}_0(-5,-4,8)$.

№15 1) $A(1,\ -1,\ 5),\ \ \mathrm{B}(0,\ 7,\ 8),\ \ \mathrm{C}(-1,\ \ 3,\ \ 8)$.

2) $x - 3y - 2z - 8 = 0,\ x + y - z + 3 = 0$.

3) $M_1(1,1,-1), \mathrm{M}_2(2,3,1), \mathrm{M}_3(3,2,1), \mathrm{M}_0(-3,-7,6)$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется направляющим подпространством плоскости?
2. Напишите формулу плоскости, проходящую через три точки.
3. Напишите общее уравнение плоскости.
4. Напишите уравнение плоскости, заданной точкой и перпендикулярным вектором.
5. Напишите уравнение плоскости, заданной точкой и направляющим подпространством.

6. Напишите условие перпендикулярности двух плоскостей.
7. Напишите формулу расстояния от точки до плоскости.
8. Какие плоскости в пространстве не будут иметь общие точки?
9. Можно ли плоскость задать двумя точками?
10. Назовите способы задания плоскости в пространстве.

Различные способы задания прямой в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости

Положение прямой в пространстве полностью определяется, если даны:

1) направляющий вектор прямой $\overline{p}(p_1, p_2, p_3)$ и некоторая ее точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2}=\frac{z-z_0}{p_3}.$$

Если одна из координат вектора $\overline{p}(p_1, p_2, p_3)$ равна нулю, например $p_3=0$, то

$$\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2},\ \ z-z_0=0.$$

Если две координаты вектора $\overline{p}(p_1, p_2, p_3)$ равны нулю, например $p_3=p_2=0$, то

$$y-y_0=0,\ \ z-z_0=0.$$

Эти уравнения называются каноническими уравнениями прямой.

2) две точки прямой $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

3) две плоскости, пересекающиеся по прямой:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

Если прямая задана этими уравнениями, то вектор

$$\bar{p}\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right)$$

является направляющим вектором этой прямой.

Пусть прямая задана направляющим вектором $\bar{p}(p_1, p_2, p_3)$ и точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Точка $M(x, y, z)$ будет принадлежать прямой тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_0M}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ и $\bar{p}(p_1, p_2, p_3)$ будут коллинеарны, т.е. $\overline{M_0M}=t\bar{p}$. Это соотношение в координатах запишется следующим образом:

$$\begin{cases} x=x_0+p_1t \\ y=y_0+p_2t \\ z=z_0+p_3t \end{cases}.$$

Это есть параметрическое уравнение прямой.

ПРИМЕР. Найти точку $M'(x', y', z')$, симметричную точке $M(1,1,1)$ относительно прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{-1}$.

РЕШЕНИЕ. $\bar{p}(2, 3, -1)$ – направляющий вектор прямой, $M_0(1, 0, -1)$ – точка, принадлежащая прямой, прямая пересекается с MM' в точке $N(x, y, z)$, причем $MN=NM'$. Тогда $\overline{MN}\perp\bar{p}\Rightarrow\overline{MN}\cdot\bar{p}=0$, т.е.

$$2(x-1)+3(y-1)-(z-1)=0,$$

$$2x+3y-z-4=0.$$

Запишем уравнение прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=3t \\ z=-1-t \end{cases}$$

и совместно решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x=1+2t, \\ y=3t, \\ z=-1-t, \\ 2x+3y-z-4=0. \end{cases}$$

Отсюда $t=\dfrac{1}{14}$, $N\left(\dfrac{8}{7},\dfrac{3}{14},-\dfrac{15}{14}\right)$.

Координаты симметричной точки $M^{/}(x^{/},y^{/},z^{/})$ можно найти, используя формулы для координат середины отрезка:

$$\frac{8}{7}=\frac{1+x^{/}}{2},$$

$$\frac{3}{14}=\frac{1+y^{/}}{2},$$

$$-\frac{15}{14}=\frac{1+z^{/}}{2}.$$

Итак, $M^{/}\left(\dfrac{9}{7},-\dfrac{4}{7},-\dfrac{22}{7}\right)$.

Рассмотрим взаимное расположение прямой и плоскости. Пусть прямая задана точкой $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и направляющим вектором $\overline{p}(p_1, p_2, p_3)$, а плоскость задана общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$.

Возможны 3 случая:

1) прямая и плоскость пересекаются, т.е. имеют одну общую точку. При этом выполняется условие:

$$Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 \neq 0.$$

Чтобы найти координаты точки пересечения прямой и плоскости, надо решить систему, состоящую из уравнения прямой и уравнения плоскости.

2) прямая параллельна плоскости. При этом выполняются условия:

$$\begin{cases} Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0. \end{cases}$$

Эти соотношения выражают необходимое и достаточное условие того, что прямая параллельна плоскости.

3) прямая лежит в плоскости. При этом выполняются условия:

$$\begin{cases} Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases}$$

ПРИМЕР. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z+2}{3}$ и плоскости $x - 2y + 4z - 4 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Пусть $M(x, y, z)$ – точка пересечения прямой и плоскости. $\overline{p}(3, 4, 3)$ – направляющий вектор прямой, $M_0(1, -2, -2)$ – точка, принадлежащая прямой. Тогда $\overline{M_0M} \parallel \overline{p} \Rightarrow \overline{M_0M} = t\,\overline{p}$. Запишем уравнение прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + 4t \\ z = -2 + 3t \end{cases}.$$

Точка $M(1+3t, -2+4t, -2+3t)$ удовлетворяет уравнению плоскости, следовательно, $1 + 3t - 2(-2 + 4t) + 4(-2 + 3t) - 4 = 0$. Откуда $t = 1$, $M(4, 2, 1)$.

Задание. **1)** Найдите точку M', симметричную точке M относительно заданной прямой.
2) Найдите точку пересечения прямой и плоскости.

№1 **1)** $M\left(0, -3, -2\right)$, $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1{,}5}{-1} = \dfrac{z}{1}$.
2) $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+1}{4}$, $x + 2y + 3z - 14 = 0$.

№2 **1)** $M\left(2, -1, 1\right)$, $\dfrac{x-4{,}5}{1} = \dfrac{y+3}{-0{,}5} = \dfrac{z-2}{1}$.
2) $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-3}{-4} = \dfrac{z+1}{5}$, $x + 2y - 5z + 20 = 0$.

№3 **1)** $M\left(1, 1, 1\right)$, $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1{,}5}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$.
2) $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+5}{4} = \dfrac{z-1}{2}$, $x - 3y + 7z - 24 = 0$.

№4 **1)** $M\left(1, 2, 3\right)$, $\dfrac{x-0{,}5}{0} = \dfrac{y+1{,}5}{-1} = \dfrac{z-1{,}5}{1}$.
2) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z+3}{2}$, $2x - y + 4z = 0$.

№5 **1)** $M\left(1, 0, -1\right)$, $\dfrac{x-3{,}5}{2} = \dfrac{y-1{,}5}{2} = \dfrac{z}{0}$.
2) $\dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z-2}{0}$, $3x + y - 5z - 12 = 0$.

№6 **1)** $M\left(2, 1, 0\right)$, $\dfrac{x-2}{0} = \dfrac{y+1{,}5}{-1} = \dfrac{z+0{,}5}{1}$.

2) $\frac{x+1}{-3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-2}, \quad x+3y-5z+9=0.$

№7 1) $M\,(-2,-3,0), \quad \frac{x+0,5}{1}=\frac{y+1,5}{0}=\frac{z-0,5}{1}.$

2) $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-1}, \quad x-2y+5z+17=0.$

№8 1) $M\,(-1,0,-1), \quad \frac{x}{-1}=\frac{y-1,5}{0}=\frac{z-2}{1}.$

2) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-4}{1}, \quad x-2y+4z-19=0.$

№9 1) $M\,(0,2,1), \quad \frac{x-1,5}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{1}.$

2) $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+4}{-1}, \quad 2x-y+3z+23=0.$

№10 1) $M\,(3,-3,-1), \quad \frac{x-6}{5}=\frac{y-3,5}{4}=\frac{z+0,5}{0}.$

2) $\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+3}{0}, \quad 2x-3y-5z-7=0.$

№11 1) $M\,(3,3,3), \quad \frac{x-1}{-1}=\frac{y-1,5}{0}=\frac{z-3}{1}.$

2) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{3}, \quad 4x+2y-z-11=0.$

№12 1) $M\,(-1,2,0), \quad \frac{x+0,5}{1}=\frac{y+0,7}{-0,2}=\frac{z-2}{2}.$

2) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-1}{-1}, \quad 3x-2y-4z-8=0.$

№13 1) $M\,(2,-2,-3), \quad \frac{x-1}{-1}=\frac{y+0,5}{0}=\frac{z+1,5}{0}.$

2) $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{2}, \quad x+2y-z-2=0.$

№14 1) $M\,(-1,0,1), \quad \frac{x+0,5}{0}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-4}{2}.$

2) $\frac{x+3}{1}=\frac{x-2}{-5}=\frac{y+2}{3}, \quad 5x-y+4z+3=0.$

№15 1) $M\,(0,-3,-2), \quad \frac{x-0{,}5}{0}=\frac{y+1{,}5}{-1}=\frac{z-1{,}5}{1}.$

2) $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-4}{3}, \quad x+3y+5z-42=0.$

Вопросы для самоконтроля:

1. Напишите канонические уравнения прямой в пространстве.
2. Напишите формулу прямой, проходящей через две точки.
3. Напишите уравнение прямой, заданной начальной точкой и направляющим вектором.
4. Напишите параметрическое уравнение прямой в пространстве.
5. При каком условии прямая и плоскость имеют одну общую точку?
6. При каком условии прямая параллельна плоскости?
7. При каком условии прямая лежит в плоскости?
8. Через прямую и точку, не лежащую на прямой, можно провести две различные плоскости?
9. Если две точки принадлежат плоскости, то прямая может пересекать плоскость?
10. Каким может быть взаимное расположение прямой и плоскости?

Тестовые задания

1. Найдите сумму матриц $2A+3B$, если $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & -8 \\ 0 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix} -3 & -6 & 5 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$.

A) $\begin{pmatrix} 39 & 42 & 63 \\ -12 & -12 & -12 \\ -3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 1 & -10 & -1 \\ 12 & -12 & -4 \\ -5 & 10 & 39 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 39 & 6 & -33 \\ 12 & 4 & -12 \\ -3 & 18 & 3 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 21 & 6 & -33 \\ -12 & 24 & 12 \\ -9 & -18 & -63 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 12 & -24 & -2 \\ -9 & 8 & 6 \end{pmatrix}$

2. Найдите произведение матриц $A \cdot B$, если $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & -8 \\ 0 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

A) $\begin{pmatrix} 39 & 6 & 97 \\ -10 & 2 & -18 \\ 5 & 14 & 49 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 9 & -54 & -47 \\ 10 & 21 & 18 \\ -5 & 14 & 49 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 39 & -58 & -11 \\ -10 & 5 & -4 \\ -1 & 12 & 11 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 9 & 54 & 47 \\ 10 & 2 & 18 \\ 5 & 14 & 49 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 9 & -54 & -47 \\ -10 & 2 & -18 \\ 5 & 14 & 49 \end{pmatrix}$

3. Вычислите определитель $|B| = \begin{vmatrix} 3 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

A) 35
B) -90
C) 38
D) -35
E) 25

4. Найдите расстояние между точками $A(-3;-4)$ и $B(-3;2)$.

A) 6
B) 10
C) 11
D) 9
E) 13

5. Найдите полярные координаты точки $A(\sqrt{3},1)$.

A) $A\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$

B) $A\left(6, \frac{\pi}{2}\right)$

C) $A\left(6,\dfrac{3\pi}{4}\right)$

D) $A\left(2,-\dfrac{\pi}{3}\right)$

E) A(0, 0)

6. Найдите прямоугольные координаты точки $A\left(5,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A) A($\sqrt{3}$,1)
B) A($\sqrt{3}$,0)
C) A(0,5)
D) A(5,0)
E) A(1,$\sqrt{3}$)

7. Напишите уравнение прямой, проходящей через две точки M(4,8) и K(-6,-3).

A) $\dfrac{x+4}{10}=\dfrac{y-7}{-1}$

B) $\dfrac{x-4}{-10}=\dfrac{y-7}{-11}$

C) $\dfrac{x-5}{7}=\dfrac{y+3}{1}$

D) $\dfrac{x+5}{7}=\dfrac{y+3}{1}$

E) $\dfrac{x+2}{-7}=\dfrac{y+4}{-1}$

8. Под каким углом пересекаются прямые $6x-2y-7=0$, $x+5y+5=0$.

A) $tg\ \varphi=-8$
B) $tg\ \varphi=3$
C) $tg\ \varphi=8$
D) $tg\ \varphi=12$
E) $tg\ \varphi=2$

9. Найдите расстояние от точки M(2,7) до прямой 2x+3y-5=0.
A) 0.47

B)

C)

D)

E)

10. Составьте уравнение эллипса, если известно, что точки и – вершины, а точки и – фокусы эллипса.

A)

B)

C)

D)

E)

11. Найдите уравнение плоскости, проходящей через три точки , , .

A)
B)
C)
D)
E)

12. Укажите формулу обратной матрицы.

A)

B)

C)

D)

E)

13. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку и перпендикулярной к прямой .

A)
B)
C)
D)
E)

14. Найдите угол между прямой и плоскостью

.

A)

B)

C)

D)

E)

15. Найдите векторное произведение векторов и .

A)
B)
C)
D)
E)

16. Какую поверхность определяет уравнение ?

А) эллипсоид
Б) цилиндр вращения
В) однополостной гиперболоид
Г) двуполостной гиперболоид
Д) гиперболический параболоид

17. Найдите угол между векторами и .

A)

B)

C)

D)

E) 1

18. Найдите координаты фокуса параболы, заданной уравнением .

A)
B)
C)
D)
D)

19. Даны векторы , и . Определите координаты вектора .

A)
B)
C)
D)
E)

20. Определите при каком значении векторы и

взаимно перпендикулярны.

A) 6
B) -6
C) 3
D) 4
E) -2

21. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку и параллельной прямой .

A)
B)
C)
D) $5x+3y-1=0$

E) $3x-5y+21=0$

22. Чему равен основной определитель линейной системы
$\begin{cases} x+2y+z=8 \\ 3x+2y+z=10 \\ 4x+3y-2z=4 \end{cases}$?

A) 14
B) -30
C) 30
D) -92
E) 36

23.Решите систему линейных уравнений $\begin{cases} x+2y+z=8 \\ 3x+2y+z=10 \\ 4x+3y-2z=4 \end{cases}$

A) (1,2,3)
B) (0,1,2)
C) (0,0,–2)
D) (-2,0,1)
E) (1,1,1)

24. Найдите общее уравнение прямой
A)
B)
C)
D)
E)

25. Прямые, параллельные малой оси и отстоящие от нее на расстоянии называются

A) директрисами гиперболы
B) директрисами эллипса
C) асимптотами эллипса

D) асимптотами гиперболы
E) директрисами параболы

26. Вычислите направляющие косинусы вектора $\vec{a}(8,5,\sqrt{11})$.

A) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\cos\beta = -\frac{1}{2}$, $\cos\gamma = -\frac{\sqrt{11}}{10}$

B) $\cos\alpha = -\frac{12}{25}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$, $\cos\gamma = -\frac{16}{25}$

C) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = \frac{1}{2}$, $\cos\gamma = \frac{\sqrt{11}}{10}$

D) $\cos\alpha = -\frac{12}{25}$, $\cos\beta = -\frac{3}{5}$, $\cos\gamma = -\frac{16}{25}$

E) $\cos\alpha = \frac{12}{25}$, $\cos\beta = -\frac{3}{25}$, $\cos\gamma = -\frac{16}{25}$

27. Вычислите определители $|A| = \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$, $|B| = \begin{vmatrix} 13 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$.

A) $|A| = -2,\quad |B| = -8$
B) $|A| = -2,\quad |B| = 2$
C) $|A| = -14,\quad |B| = -8$
D)
E)

28. Найдите уравнение прямой, являющейся линией пересечения двух плоскостей

A)

B)

C)

D)

E)

29. Даны вершины треугольника . Вычислите площадь треугольника.

A) 29

B) 36

C) 45

D) 40

E) 20

30. Если плоскость параллельна оси , то ее уравнение имеет вид

A)

B)

C)

D)

E)

Список литературы

Основная литература:

1. Кострикин В.И. Введение в алгебру. Линейная алгебра. – М.: МЦНМО, 2018. – 367 с.
2. Босс В. Лекции по математике: Линейная алгебра. – М.: Ленанд, 2019. – 224 с.
3. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник для вузов. – Санкт-Петербург: Лань, 2022. – 448 с.
4. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – Санкт-Петербург: Лань, 2023. – 512 с.
5. Степанова М.А. Аналитическая геометрия. Курс лекций. – Санкт-Петербург: Лань, 2023. – 172 с.

Дополнительная литература:

1. Авилова Л.В. Болотюк В.А., Болотюк Л.А. Практикум и индивидуальные задания по векторной алгебре и аналитической геометрии. – Санкт-Петербург: Лань, 2013. – 288 с.
2. Тищенкова Л.М. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Теория и решение задач. – М.: КноРус, 2013. – 608 с.
3. Краснов М.Л., Кисилев А.И., Макаренко Г.И. Вся высшая математика. Аналитическая геометрия, векторная алгебра, линейная алгебра, дифференциальное исчисление. Т.1. – М.: КД Либроком, 2014. – 336 с.
4. Максимов Ю.Д., Антонов В.И. и др. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Опорный конспект. – М.: Проспект, 2016. – 144 с.
5. Постников М.М. Лекции по геометрии. Линейная алгебра. – М.: Ленанд, 2017. – 400 с.
6. Золотаревская Д.И. Линейная алгебра: Краткий курс. – М.: Ленанд, 2018. – 216 с.
7. Опойцев В.И. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. – М.: Ленанд, 2018. – 256 с.

8. Зимина О.В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Учебный комплекс для вузов. – Ростов на Дону: Феникс, 2018. – 157 с.

9. Фиников С.П. Аналитическая геометрия: Курс лекций. М.: Ленанд, 2019. – 328 с.

6. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре: учебное пособие для вузов. – Санкт-Петербург: Лань, 2022. – 476 с.

10. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии: учебное пособие для вузов. – Санкт-Петербург: Лань, 2022. – 224 с.

Содержание

Объем 6,9 п.л. Тираж 500. Заказ № 165

Сверстано и отпечатано в редакционно-издательском центре
Западно-Казахстанского университета им. М.Утемисова
г. Уральск, пр-т Н.Назарбаева,162.