

Министерство образования и науки Республики Казахстан  
Западно-Казахстанский университет им. М. Утемисова

**Кузьмичева А.Е., Кушеккалиев А.Н.,  
Жусупкалиева Г.К., Имангалиева Б.С.**

**ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ**  
*Учебник*

Уральск, 2021

УДК 530  
ББК 22.31  
Э 45

*Рекомендовано УМО в области образования «Педагогические науки»  
Республиканского учебно-методического Совета МОН РК на базе КазНПУ имени Абая  
Протокол №3, от «21» мая 2021 г.*

**Рецензенты:**

<b>Бактыбеков К.С.</b>	доктор физико-математических наук, профессор АО НК «Казахстан Гарыш сапары»
<b>Шункеев К.Ш.</b>	доктор физико-математических наук, профессор Актюбинского регионального университета
<b>Гумаров Г.С.</b>	доктор технических наук, профессор Западно-Казахстанского университета им.М.Утемисова

**Кузьмичева А.Е., и др.**

**Э45 Электромагнитные явления:** Учебник / А.Е.Кузьмичева, А.Н.Кушеккалиев,  
Г.К.Жусупкалиева, Б.С.Имангалиева - Уральск: РИЦ ЗКУ им.М.Утемисова, 2021. - 238 стр.

Данный учебник разработано к элективному курсу «Электромагнитные явления». Учебник содержит материалы, по анализу роли электромагнитных взаимодействий в системе фундаментальных взаимодействий, пониманию их обменного механизма и радиуса действия. Уделено внимание анализу механизмов излучения электромагнитных волн в связи с их ролью в исследовании процессов, протекающих, в Космосе. Понимание этого вопроса особенно важно для понимания внутренней интеграции физики и астрономии. На основе представлений классической и современной физики рассматриваются роль эффекта Зеемана в развитии представлений о магнитных свойствах атома и магнитные свойства вещества, связанные с существованием спина (ферромагнетизм, антиферромагнетизм, ферримагнетизм).

**ISBN 978-601-266-510-9**



**УДК 530  
ББК 22.31**

© Кузьмичева А.Е., и др, 2021.  
© РИЦ ЗКГУ им. М. Утемисова, 2021.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	5
<b>Глава 1. Электромагнитное поле и электромагнитные взаимодействия как составляющие физической картины мира.....</b>	<b>6</b>
1.1 Электромагнитное взаимодействие в содержании обучения и в системе фундаментальных взаимодействий.....	6
1.2 Обменный характер взаимодействий.....	7
1.3 Объединение взаимодействий.....	9
1.4 Из истории развития представлений об электричестве и магнетизме. Электрическое и магнитное взаимодействие зарядов.....	11
1.5 Электрический заряд и его свойства.....	13
1.6 Электрическое и магнитное взаимодействие электрических зарядов.....	15
1.7 Электромагнитное поле. Квантовая электродинамика.....	17
1.8 О массе фотона.....	21
1.9 Генерация электромагнитных волн.....	23
1.10 Классификация механизмов излучения. Классические механизмы излучения электромагнитных волн.....	28
1.11 Всеволновая астрономия.....	31
1.12 Электромагнитное излучение звезд. Нейтронные звезды.....	39
<b>Глава 2. Магнитное поле в вакууме и его характеристики.....</b>	<b>42</b>
2.1 Магнитное поле в вакууме и его характеристики.....	42
2.2 Закон Био-Савара-Лапласа.....	44
2.3 Применение закона Био-Савара-Лапласа к расчету магнитных полей прямолинейного и кругового токов.....	47
2.4 Магнитное взаимодействие токов. Силы Лоренца и Ампера.....	51
2.5 Циркуляция индукции магнитного поля. Вихревой характер магнитного поля.....	54
2.6 Применение закона полного тока для расчета магнитных полей.....	57
2.7 Магнитный поток. Магнитные цепи.....	60
2.8 Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле.....	63
<b>Глава 3. Эффект Зеемана. Магнитные свойства электрона.....</b>	<b>66</b>
3.1 Эффект Зеемана: простой (нормальный) и сложный (аномальный).....	66
3.2 Применение эффекта Зеемана.....	69
3.3 Классическая теория простого эффекта Зеемана.....	72
3.4 Квантовая теория эффекта Зеемана.....	76
<b>Глава 4. Вещество в электрическом и магнитном полях.....</b>	<b>79</b>
4.1 Проводники и диэлектрики в электрическом поле. Классификация диэлектриков.....	79
4.2 Диэлектрические потери. Пробой диэлектрика.....	83
4.3 Классификация вещества по поведению во внешнем магнитном поле. Молекулярные токи.....	85
4.4 Механизм намагничивания диамагнетиков и парамагнетиков.....	89
4.5 Ферромагнетики, антиферромагнетики, ферримагнетики.....	93
4.6 Магнетизм свободных электронов.....	102
4.7 Парамагнетизм свободных электронов. Парамагнетизм Паули.....	106
<b>Глава 5. Электромагнитная индукция. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях.....</b>	<b>110</b>
5.1 Явление электромагнитной индукции. Основной закон электромагнитной индукции.....	110
5.2 Вывод основного закона электромагнитной индукции из закона сохранения и превращения энергии.....	113
5.3 Явление самоиндукции. Магнитное поле бесконечно длинного соленоида.....	115
5.4 Явление самоиндукции при замыкании и размыкании электрической цепи.....	117
5.5 Энергия магнитного поля. Объемная плотность энергии магнитного поля.....	120
5.6 Движение заряженных частиц в однородном электрическом поле.....	123
5.7 Движение заряженных частиц в однородном магнитном поле.....	124
5.8 Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях. Гальваномагнитные явления.....	126
5.9 Применение электронных пучков в науке и технике. Понятие об электронной оптике.....	128

<b>Глава 6. Электромагнитные колебания. Теория максвелла.....</b>	<b>134</b>
6.1 Нелинейный осциллятор. Физические системы, содержащие нелинейность.....	134
6.2 Получение электромагнитных колебаний. Собственные электромагнитные колебания. Дифференциальное уравнение собственных электромагнитных колебаний и его решение.....	136
6.3 Затухающие электромагнитные колебания.....	138
6.4 Вынужденные электромагнитные колебания. Резонанс.....	141
6.5 Основные положения теории Максвелла.....	144
6.6 Представление ЭДС индукции с помощью теоремы Стокса.....	147
6.7 Представление циркуляции $\mathbf{H}$ с помощью теоремы Стокса.....	148
6.8 Ток смещения.....	149
6.8 Система уравнений Максвелла.....	151
6.9 Электромагнитные волны. Волновое уравнение.....	155
6.10 Источники электромагнитного излучения.....	162
<b>Глава 7. Эффект Холла.....</b>	<b>164</b>
7.1 Квантование в микро- и макромире.....	164
7.2 Квант магнитного потока.....	167
7.3 Классический эффект Холла.....	171
7.4 Применение классического эффекта Холла.....	174
7.5 Целочисленный квантовый эффект Холла.....	178
7.6 Двумерный электронный газ.....	180
7.7 Роль магнитного поля. Уровни Ландау в двумерном электронном газе.....	182
<b>Глава 8. Принцип относительности в электродинамике. Квазистационарное электромагнитное поле.....</b>	<b>187</b>
8.1 Релятивистское преобразование электромагнитных полей, зарядов и токов.....	187
8.2 Инвариантность уравнений Максвелла относительно преобразований Лоренца.....	194
8.3 Квазистационарное электромагнитное поле.....	196
8.4 Квазистационарные электрические токи.....	199
<b>Глава 9. Распространение электромагнитной волны в различных средах.....</b>	<b>211</b>
9.1 Распространение электромагнитной волны в изотропной диэлектрической среде.....	211
9.2 Распространение электромагнитной волны в анизотропной среде.....	213
9.3 Явление двойного лучепреломления.....	219
9.4 Получение эллиптического и циркулярно поляризованного света.....	220
9.5 Искусственная анизотропия.....	223
9.6 Отражение и преломление света на границе двух диэлектриков.....	225
9.7 Коэффициенты отражения и пропускания.....	228
Заключение.....	232
Глоссарий.....	233
Литература.....	237

## ВВЕДЕНИЕ

Электрические и магнитные явления играют важную роль в физической картине мира и практической деятельности человека. Многие явления, процессы в окружающем нас мире связаны с существованием электрических зарядов, их движением и взаимодействием, существованием электрических и магнитных полей, создаваемых этими зарядами. Электрические заряды определяют электрические и магнитные свойства вещества. Заряды и электромагнитные поля занимают важное место в структуре Вселенной и позволяют получать информацию о процессах, которые в ней протекают. Современный научно-технический прогресс в значительной степени связан с использованием электрического тока, представляющего собой упорядоченное движение заряженных частиц, электромагнитных волн различного диапазона, создаваемых движущимися электрическими зарядами. Не менее важна роль электрических зарядов, электромагнитного взаимодействия в развитии физической науки, в которой это взаимодействие является одним из четырех известных в настоящее время фундаментальных взаимодействий. С электромагнитными явлениями, электромагнитным взаимодействием связаны многие фундаментальные открытия теоретической физики. С исследованием света, представляющего собой электромагнитные волны определенного диапазона, связано возникновение специальной теории относительности и квантовой физики, утверждающей дуализм, двойственную корпускулярно-волновую природу частиц окружающего нас мира.

Значимость электрических и магнитных явлений в окружающем мире находит отражение в содержании обучения физике в школе и, следовательно, в содержании подготовки учителя физики и астрономии. Содержание предлагаемого учебно-методического пособия направлено на формирование у обучаемых целостного представления о роли электричества и магнетизма в науке и практической деятельности.

Учебник включает цикл лекций по элективному курсу «Электромагнитные явления», который в течение ряда лет входят в ОП магистрантов. Изучение вопросов, предлагаемых в учебно-методическом пособии, предполагает знание обучаемыми основных положений и законов электричества и магнетизма, электродинамики, которые входят в содержание школьного курса физики и вузовского курса общей физики. Поэтому важно на этапе актуализации обратить внимание на то, что физика является наукой развивающейся. Она имеет исторические корни, к которым относятся основные понятия электрического заряда, электрического, магнитного и электромагнитного полей. В процессе развития науки были сформулированы основные законы, определяющие силы взаимодействия зарядов между собой, силы, с которыми поля действуют на заряды и которые определяют характер движения зарядов в полях. Необходимо обратить внимание на различие в действии полей на заряды: электрическое поле действует на заряд независимо от его состояния, а магнитное только на движущиеся заряды и при условии наличия составляющей скорости, перпендикулярной к направлению поля. Поэтому сила Кулона, с которой электрическое поле действует на заряд, совершает работу и, следовательно, может изменять (увеличивать или уменьшать) кинетическую энергию электрона. Сила Лоренца, с которой магнитное поле действует на заряд, всегда перпендикулярна к скорости, поэтому работы не совершает, не изменяет кинетическую энергию частицы, не изменяет модуль скорости. Сила Лоренца может изменить только направление движения, то есть создать нормальное ускорение. Таким образом, ускорение заряженной частицы создается и силой Кулона, и силой Лоренца. Следовательно, излучать электрический заряд может, двигаясь и в электрическом, и в магнитном полях.

На этапе актуализации важно также обратить внимание на логику развития физической науки, которая с необходимостью привела к идее о существовании полей, через которые осуществляются взаимодействия. Эта идея стала особенно важной в современной физике, в основе которой лежат квантовая теория и обменный характер взаимодействия.

# Глава 1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КАК СОСТАВЛЯЮЩИЕ ФИЗИЧЕСКОЙ КАРТИНЫ МИРА

## 1.1 Электромагнитное взаимодействие в содержании обучения и в системе фундаментальных взаимодействий

Открытие и исследование фундаментальных взаимодействий играет большую роль в развитии физической науки. В соответствии с дидактическим принципом научности и доступности содержание обучения физике соответствует достижениям науки, включает основные понятия, законы, фундаментальные теории с учетом возрастных особенностей обучаемых. Электромагнитное взаимодействие в истории физической науки было обнаружено после гравитационного. Этому виду взаимодействия, как и гравитационному, уделяется большое внимание на всех этапах обучения физике в школе и в вузе. Его изучение начинается с изучения понятий электрического заряда и поля (электрического и магнитного), их основных свойств и законов, которым они подчиняются. Электрические и магнитные явления, обусловленные электромагнитным взаимодействием, широко распространены в природе и находят широкое применение в практической деятельности, в жизни современного человека (электричество, радио, телевидение и т.п.). Поэтому учащиеся изучают их на протяжении всего периода обучения, начиная с 8 класса. В программу обучения входит изучение явлений, связанных с неподвижными и движущимися зарядами, электрическим током, электрическими, магнитными, электромагнитными полями, электромагнитными волнам [1]. Один из заключительных разделов физики – физика атома, атомного ядра и элементарных частиц. Структурные составляющие атома (ядро и электронная оболочка) и значительная часть элементарных частиц имеют электрический заряд. Поэтому, несмотря на то, что в микромире становятся значимыми другие виды взаимодействия (сильное, слабое), значимость электромагнитного взаимодействия в этой области также велика. Таким образом, в содержании обучения, как и в физической науке, электромагнитное взаимодействие играет большую роль, поэтому его исследованию и изучению уделяется большое внимание. Для более глубокого понимания обучаемыми значимости электромагнитного взаимодействия в физической картине мира целесообразно обратить внимание на логику влияния исследований этого взаимодействия, особенностей его проявления на формирование фундаментальных физических теорий, которые являются основой современной физической науки. Этому вопросу посвящено данное исследование.

**Электромагнитное взаимодействие** является одним из четырех известных в настоящее время фундаментальных взаимодействий. Все они в своей совокупности дают современное представление о физической картине мира. Их проявление зависит от условий, структурного уровня материи, на котором рассматривается конкретное физическое явление. Сильное и слабое взаимодействия обеспечивают процессы в мире элементарных частиц. Гравитационное взаимодействие универсально, но вследствие малой величины гравитационной постоянной, его роль особенно значима, если взаимодействуют тела большой массы. Поэтому роль гравитационного взаимодействия велика в масштабах Космоса. Электромагнитное взаимодействие по своей интенсивности занимает второе место после сильного взаимодействия. Оно является результатом существования в природе электрических зарядов, электрических и магнитных полей, являющихся составляющими физической картины мира.

Началом исследований электромагнитных взаимодействий является исследование электростатического взаимодействия, то есть взаимодействия неподвижных зарядов (закон Кулона). Движущиеся электрические заряды создают не только электрическое, но и магнитное поле. Упорядоченное движение заряженных частиц создает электрический ток. Магнитное взаимодействие было обнаружено как взаимодействие проводников с током. Данные вопросы входят в программу изучения физики 8 класса, то есть на начальном этапе изучения физики. В дальнейшем изучаются более сложные вопросы, часть из которых входит в содержание обучения учащихся физико-математического профиля и обучающихся соответствующих специальностей.

Следствием электромагнитного взаимодействия являются связи частиц в физических системах: ионная, ковалентная (обменная), металлическая, водородная. Эти типы связей обеспечивают, например, существование кристаллической решетки твердого тела, существование металлов, представляющих собой положительную ионную кристаллическую решетку и газ свободных электронов. Электромагнитное взаимодействие вместе с сильным обеспечивает взаимодействие

кварков в адронах и взаимодействие нуклонов в ядрах, обеспечивая строение ядер и взаимодействие электронов с ядрами в атомах и обеспечивая строение атомов и молекул [2].

Значимость электромагнитных взаимодействий в окружающем нас мире, в структуре материи и характере протекающих процессов определяет принципиальную роль исследования этих взаимодействий в развитии фундаментальной физической науки. С ними связаны радикальные изменения в представлениях о характере физических законов. Известно, что физика делится на релятивистскую и нерелятивистскую, классическую и современную (квантовую). Возникновение такого деления в физической науке непосредственно связано с изучением электромагнитных явлений. Разработанная Дж.Максвеллом теоретическая электродинамика поставила проблемы перед классической физикой. Ее уравнения оказались инвариантными к принятым в классической физике преобразованиям координат и времени (преобразования Галилея). Требования инвариантности к преобразованиям является одним из основных требований к физической теории. Вторая проблема связана с проблемой света, который, согласно теории Дж.Максвелла, является электромагнитными волнами определенного диапазона, и который, как показали эксперименты, не подчиняется классическому закону сложения скоростей. Анализ сложившейся ситуации привел, в конечном счете, к созданию специальной теории относительности (СТО) А.Эйнштейна. Лежащие в основе СТО два постулата и преобразования Лоренца определяют область применимости классической физики, как область малых скоростей по сравнению со скоростью света. Возникла новая релятивистская физика, физика высоких скоростей. В такой терминологии классическая механика Галилея - Ньютона называется нерелятивистской.

С проблемой света связано и возникновение современной квантовой физики. В рамках классической физики принималось существование двух принципиально различных объектов исследования: движение частиц и распространение волн. Каждый из них подчиняется своим закономерностям. Движение частиц описывается законами Ньютона, распространение волн – волновыми уравнениями. Относительно света долгое время оставался нерешенным вопрос о том, представляет ли он собой поток частиц или это волновой процесс. Исследованию природы света уделялось большое внимание на всем протяжении развития физической науки, ей посвящено большое количество экспериментов, которые приводили к противоречивым результатам. Эти исследования сопровождались различными открытиями. Фундаментальным является известное утверждение о наличии у света и волновых, и корпускулярных свойств, которое окончательно вошло в физику после работ Эйнштейна по фотоэффекту. В физику вошло представление о дуализме. Волновые и корпускулярные свойства света достаточно подробно излагаются в учебных пособиях [3].

## 1.2 Обменный характер взаимодействий

Излучение, создаваемое электрическими зарядами, может рассматриваться и как электромагнитные волны, и как поток частиц. Свет как волновое явление – это электромагнитные волны, как квантовое – поток частиц, фотонов. Электромагнитное поле оказалось дискретным, квантованным. Это привело ученых к необходимости более глубокого рассмотрения механизма взаимодействия электрических зарядов, что оказало принципиальное влияние на понимание механизма и других фундаментальных взаимодействий. В электромагнитном взаимодействии участвуют электрически заряженные частицы и некоторый посредник взаимодействия. С точки зрения классической электродинамики таким посредником взаимодействия электрических зарядов является электромагнитное поле, существующее вокруг заряженных частиц. Одно заряженное тело (частица) взаимодействует с полем другого заряженного тела (частицы). Но если учесть дискретный характер поля, то возникает вопрос о механизме взаимодействия зарядов. Принятие представления о фотонах, как квантах электромагнитного поля, привело к представлению о существовании в природе еще одного механизма взаимодействий, в котором посредником взаимодействия являются кванты поля. Это обменный характер взаимодействия.

Таким образом, понимание дуализма, двойственной природы света, как электромагнитного явления, привело к пониманию электромагнитного взаимодействия как обмена фотонами и представлению об обменном характере взаимодействия. Оно оказалось применимым и для других видов взаимодействий и стало одним из основных элементов фундаментальной физической теории. Для каждого вида фундаментальных взаимодействий характерны свои посредники взаимодействия, кванты соответствующего поля. Уже в содержании школьного курса физики отмечается, что посредниками сильного (ядерного) взаимодействия между протонами и нейтронами в ядрах атомов

являются  $\pi$  – мезоны, которые рассматриваются как кванты ядерного поля. Одной из характеристик фундаментальных взаимодействий является **радиус взаимодействия**. Известно, что силы, определяющие взаимодействия, делятся на дальнедействующие и короткодействующие. К дальнедействующим относятся силы гравитационного и электростатического взаимодействия:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Из формул видно, что силы этих взаимодействий только при неограниченном возрастании расстояния стремятся к нулю. Сильное (ядерное) взаимодействие проявляется только на малых расстояниях. Короткодействующим является взаимодействие протонов и нейтронов в ядре. Объяснение величины радиуса действия тех или иных фундаментальных сил находят в квантовой физике на основе соотношения неопределенностей для энергии и времени  $\Delta E \Delta t \geq \hbar$ . Здесь  $\Delta E$  – принципиальная неопределенность измеренного значения энергии, которая остается даже при идеальной точности приборов.  $\Delta t$  – продолжительность существования состояния, энергия которого измеряется. Энергия может быть измерена точно ( $\Delta E = 0$ ), только если состояние существует бесконечно долго ( $\Delta t \rightarrow \infty$ ). Это следует из выражения  $\Delta E \geq \frac{\hbar}{\Delta t}$ . Развитие физики от принятия двойственной природы света и гипотезы де Бройля, соотношение неопределенности как следствие корпускулярно-волнового дуализма частиц излагаются в используемых в учебном процессе пособиях.

Проблема закона Кулона в связи с обменным характером взаимодействий и соотношением неопределенности для энергии и времени рассмотрена. При рассмотрении электромагнитного и других взаимодействий важно другое понимание соотношения неопределенностей для энергии  $\Delta E \Delta t \geq \hbar$ . Если обнаруживается несоответствие энергии системы в двух состояниях на величину неопределенности  $\Delta E$  в течение времени  $\Delta t$ , то это нельзя рассматривать как нарушение закона сохранения энергии. Это нарушение кажущееся. Если такое кажущееся нарушение происходит в каком-то процессе, то оно не является нарушением закона сохранения энергии. Для величин  $\Delta E$  и  $\Delta t$ , удовлетворяющих указанному выше соотношению неопределенностей, говорить о нарушении закона сохранения смысла не имеет. Это имеет значение при определении радиуса действия в фундаментальных взаимодействиях.

Обменный механизм электромагнитного взаимодействия означает испускание и поглощение фотонов (квантов электромагнитного поля) взаимодействующими электрически заряженными частицами. Если заряд неподвижный, то его энергия после испускания фотона не изменилась, но фотон унес энергию  $W = \hbar\nu$ . Появляется кажущееся нарушение закона сохранения энергии. Оно будет кажущимся, если происходит в течение интервала времени  $\Delta t = \tau$ , удовлетворяющим соотношению неопределенности, в котором  $\Delta E = W$ , Тогда  $\tau \geq \frac{\hbar}{W}$ . Но за время  $\tau$  переносчик взаимодействия должен или встретить другой заряд и поглотиться им, или вернуться к первоисточнику (к своему заряду). Такие процессы, идущие с кажущимся нарушением энергии, называются **виртуальными процессами**. А частицы, кванты поля, которые осуществляют взаимодействие, называются **виртуальными частицами**, обнаружить их невозможно. Но, если увеличить энергию излучающей частицы, то есть сообщить ей ускорение, то фотоны могут стать реальными. Аналогично в ядре, например, осуществляется сильное взаимодействие между нуклонами. Переносчиком взаимодействия является  $\pi$  – мезон. В ядре  $\pi$  – мезоны являются виртуальными. Но, если сообщить нуклону дополнительную энергию, то  $\pi$  – мезон может стать реальным, то есть уйти от частицы, которая его излучила и существовать независимо от частицы, которая его испустила. Виртуальные частицы могут уйти от своего источника на расстояние, которое определяется свойствами этой виртуальной частицы. Если предположить максимально возможную скорость переносчика взаимодействия, то уйти виртуальная частица может на расстояние  $ct$ :

$$r = ct = c\tau = \frac{c\hbar}{W} = r_{\text{вз}} \text{ (радиус взаимодействия).}$$

Согласно теории относительности Эйнштейна энергия виртуальной частицы  $W = mc^2$ . Тогда радиус взаимодействия представляется в форме

$$r_{\text{вз}} = \frac{\hbar}{mc},$$

где  $m = m_0$  – масса покоя переносчика взаимодействия. Переносчиком электромагнитного взаимодействия является фотон, у которого  $m_0 = 0$ , а поэтому  $r_{вз} \rightarrow \infty$ . Поэтому электромагнитное взаимодействие является **дальнодействующим**, то есть оно осуществляется при любых сколь угодно больших расстояниях.

**Примечание:** закон Кулона  $F = \frac{kq_1q_2}{r^2}$ . Сила гравитации и  $F_{грав} = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$ . Характер зависимости гравитационного взаимодействия от расстояния аналогичен электрическому. Следовательно, оно тоже является дальнодействующим. А это означает, что квант гравитационного поля – гравитон должен иметь нулевую массу покоя. Многие ученые в настоящее время не сомневаются в этом. Трудность обнаружения гравитона связана со слабостью гравитационного взаимодействия, с малой величиной гравитационного поля.

У взаимодействий, переносчики которых имеют не нулевую массу покоя, радиус взаимодействия ограничен и чем больше масса переносчика, тем меньше радиус взаимодействия. Такие взаимодействия называются короткодействующими. Таким образом, с точки зрения обменного характера взаимодействия, частицу, способную к взаимодействиям окружают переносчики взаимодействия, образуя облако виртуальных частиц, которое простирается на различные расстояния, поэтому частица с разных расстояний выглядит одинаково.

### 1.3 Объединение взаимодействий

Одной из проблем современной физики является проблема создания единой теории поля, то есть создание единой теории взаимодействия. Для решения этой проблемы необходимо определить, при каких условиях различия между взаимодействиями становятся несущественными, так чтобы они проявлялись как одно взаимодействие. Взаимодействия различаются по радиусу действия, различен и характер зависимости сил взаимодействия от расстояния. На очень малых расстояниях силы различных взаимодействий могут оказаться близки друг другу, и тогда различий между ними не будет. Это будет единое взаимодействие. Для получения такой ситуации в эксперименте необходимы частицы высоких энергий, чтобы они могли сблизиться на малые расстояния. Следовательно, проблема создания единой теории поля связана с проблемой получения частиц высоких энергий. Радиус действия какого-либо взаимодействия зависит от переносчиков взаимодействия. Чем больше энергия взаимодействующих частиц, тем глубже они проникают друг в друга (сближаются облака соответствующих переносчиков). При этом возникают соответствующие взаимодействия. При очень высоких энергиях взаимодействие будет единым, произойдет **суперобъединение** всех взаимодействий. Такой метод рассуждения является одним из подходов к созданию единой теории поля [4].

С другой стороны, проблемы физики высоких энергий в настоящее время оказались связанными с проблемами космологии, проблемами происхождения и развития Вселенной. По современным представлениям в момент времени  $t \sim 10^{-41}$ с. энергия частиц была выше  $10^{19}$ ГэВ, что соответствует температурам выше  $10^{32}$ К. При таких высоких энергиях взаимодействия неразличимы, должны были проявляться как одно взаимодействие. Такое состояние называют суперобъединением фундаментальных взаимодействий. К таким высоким энергиям стремится современная наука, говоря об условиях объединения всех четырех взаимодействий. С возрастом Вселенной в результате ее расширения энергия частиц уменьшается, температура понижается. Первым из суперобъединения выделяется гравитационное взаимодействие при энергиях меньше  $10^{19}$ ГэВ, температура ниже  $10^{32}$ К. Оставшиеся три взаимодействия остаются единым взаимодействием, называемым по современной терминологии **Великим объединением**. Из этого объединения при уменьшении энергиях меньше  $10^{14}$ ГэВ, при температурах ниже  $10^{27}$ К выделяются сильное взаимодействие и электрослабое. Только при энергиях меньше  $10^2$ ГэВ, температурах ниже  $10^{15}$ К **электрослабое** взаимодействие разделяется на электромагнитное и слабое. Физика высоких энергий стремится пройти этот процесс в обратном направлении, используя ускорители для получения частиц высоких энергий. Естественно, что первым достижением было объединение электромагнитного и слабого в единое электрослабое, так как это не требовало очень высоких энергий. В настоящее время проблемой является достижение таких энергий частиц, которые позволили бы подтвердить суперобъединение. Таким образом, экспериментальное и теоретическое исследование фундаментальных взаимодействий при высоких энергиях ведут к

построению единой теории поля и в то же время могут дать подтверждение современного представления о происхождении и развитии Вселенной, опирающиеся на модель **Большого Взрыва**.

Для понимания проблемы создания единой теории взаимодействия необходимо понимание заряда и константы взаимодействия как основных характеристик взаимодействия. При этом под термином «заряд», исторически введенного как характеристики особого вида взаимодействия – электрического, имеется ввиду не только электрический заряд. В теории взаимодействий **заряд** характеризует способность тел (частиц) создавать поле. В этом смысле заряд (не только электрический) приписывается частицам при разных видах взаимодействий, то есть понятие заряда расширяется. В квантовой теории поля заряд определяет меру активности, или интенсивности испускания и поглощения «заряженными» частицами переносчиков взаимодействия. Именно в этом смысле и рассматриваются «заряды» сильного и слабого взаимодействия. Но «заряды» сильного и слабого взаимодействия по некоторым свойствам отличаются от электрического заряда. Например, испустив или поглотив фотон, электрически заряженная частица не превращается в другую, а только меняет свое состояние. Поэтому в не квантовом, то есть классическом полевом представлении в случае электромагнитного взаимодействия проявляются частица сама по себе, а поле (совокупность фотонов) само по себе. Процессы сильного и слабого взаимодействия сопровождаются взаимными превращениями частиц. Например, при  $\beta$  – распаде в начале появляется промежуточный бозон как переносчик взаимодействия, который затем распадается:

$$n \rightarrow p + W^-, \quad W^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e.$$

При рассмотрении обменного характера взаимодействия важно **число частиц**, способных к данному виду взаимодействия, и **способность** к данному виду взаимодействия. От этого зависит как часто и с какой интенсивностью протекает взаимодействие. В общем смысле заряд как характеристика фундаментальных взаимодействий, в том числе электромагнитного, определяется числом частиц, способных к данному виду взаимодействия. В этом смысле заряд - величина сохраняющаяся, то есть заряд сохраняется во всех взаимодействиях, как **способность** к данному виду взаимодействия. Но как **мера** способности к данному виду взаимодействия заряд не сохраняется даже электрический, поэтому кроме заряда вводится **константа взаимодействия** как их характеристика. Именно она является мерой способности частиц к данному взаимодействию, мерой превращения одних частиц в другие, в результате испускания переносчиков взаимодействия. Константу взаимодействия можно представить, как величину равную энергии взаимодействия двух частиц, находящихся на определенном расстоянии и имеющих определенный заряд. Отсюда видно, что константа взаимодействия зависит от расстояния, потому что от расстояния зависит плотность потока переносчиков взаимодействия. Связь между зарядом и константой взаимодействия в том, что частица, имеющая какой-либо заряд способна к данному виду взаимодействия. Заряды и константы гравитационного и электромагнитного взаимодействия при малых энергиях полностью соответствуют друг другу. С изменением расстояния между частицами константа взаимодействия изменяется, а число частиц (заряд) не меняется. Изменить расстояние можно, если изменить энергию частиц. При больших энергиях частицы сближаются на меньшее расстояние, и константа взаимодействия возрастает. Например, при энергиях  $10^{14}$  ГэВ константы взаимодействия становятся равными, и это является основанием для разработки теории **великого объединения**, то есть объединения сильного, слабого и электромагнитного взаимодействий.

Таким образом, исторически первым было обнаружено гравитационное взаимодействие, после него - электромагнитное, а затем сильное и слабое. Все эти виды взаимодействий входят в содержание обучения в различные разделы физики. Для более глубокого понимания их роли целесообразно на заключительном этапе изучения физики обратить внимание на необходимость проведения обобщающих занятий, на которых могут быть рассмотрены фундаментальные взаимодействия, которые в своей совокупности определяют физическую картину мира. Отметить, что значимость каждого из них определяется областью исследования. Обратить внимание на то, что, как отмечено выше, роль электромагнитного взаимодействия в физической науке определяется не только областью явлений и процессов, связанных с наличием в природе электрического заряда. С исследованием электромагнитных взаимодействий связаны принципиальные изменения в представлениях о физической картине мира. При изучении электромагнитных явлений в физике возникла идея дискретности (квантования), несвойственная классической физике. Одним из следствий такого представления явилось понимание обменного характера взаимодействия. На основе многочисленных теоретических и экспериментальных исследований было принято представление о

двойственной корпускулярно-волновой природе света, как электромагнитного явления, которое в последующем было распространено на все физические объекты, что привело к возникновению квантовой механики с ее соотношением неопределенностей. Разработка теоретической электродинамики и соответствующие эксперименты привели к представлению о существовании в природе максимальной скорости материальных объектов с ненулевой массой покоя. Единство физического мира подтверждается тем, что представления о свойствах электромагнитного взаимодействия оказались плодотворными при исследовании всех фундаментальных взаимодействий. Такое обобщение позволит показать обучаемым не только многообразие явлений природы, но и их единство в единой физической картине мира. Рассмотренный в данном параграфе материал опубликован в статье [5].

#### **1.4. Из истории развития представлений об электричестве и магнетизме. Электрическое и магнитное взаимодействие зарядов**

Началом научного исследования электрических и магнитных исследований является книга У.Гильберта «О магнитах, магнитных телах и большом магните – Земле». Ему принадлежит и термин «электричество», произошедший от греческого названия янтаря. Гильберт исследовал различные тела на наличие электрических явлений. Для этой цели он построил специальный электрический указатель, который является прототипом современных электроскопов. В результате проведения множества опытов им было установлено, что многие тела обладают способностью притягивать. Но, Гильберт обнаружил также, что есть множество тел, которые такой способностью не обладают. В соответствии с этим Гильберт ввел понятие электрических и неэлектрических тел. В сочинении Гильберта многие интересные наблюдения объясняются фантастически в духе средневековых алхимиков. Однако его труд имеет огромное значение: он положил основание изучению электрических и магнитных явлений. В дальнейшем в изучение электрических и магнитных явлений внесли вклад многие известные ученые. Далее приведены первые исследования в области электричества и магнетизма. При разработке материала использована информация, изложенная в работе.

**Первые исследования электричества и магнетизма.** Ученые их исследования, опыты, открытия.

**Уильям Гильберт (1544 –1603 гг.).** В своем сочинении «О магнитах, магнитных телах и большом магните – Земле», вышедшем в Лондоне в 1600 году, он впервые рассмотрел магнитные и многие электрические явления и привел большой список тел, электризующихся трением. Его исследования свойств магнитной стрелки привели к верному выводу, что и Земля является магнитом. Исследованиям магнетизма и электричества Уильям Гильберт посвятил 18 лет своей жизни, поставил свыше 600 опытов.

**Исаак Ньютон (1643 – 1727 гг.).** В 1675 году наблюдал электрическую пляску кусочков бумаги под стеклом, положенным на металлическое кольцо. В 1716 Ньютон году наблюдал искровой разряд между острием иглки и наэлектризованным телом.

**Роберт Бойль (1627 – 1691 гг.).** Опыт с шаром. Установил, что наэлектризованное и ненаэлектризованное тела взаимопритягиваются. Также показал, что электрические взаимодействия наблюдаются и в вакууме.

**Доктор Уолл.** В 1700 году извлек электрическую искру из натертого куска янтаря.

**Фрэнсис Хоксби (1666—1713 гг.).** В 1705 году получил электрическую искру.

**Стефан Грей (1670-1736 гг.).** 1729 год - открыл явление электропроводимости тел. Показал, что для сохранения электрического заряда тело должно быть изолировано.

**Шарль Дюфэ (1698-1739 гг.).** Создал первую теорию электрических явлений. В 1733 году он установил два рода электрических взаимодействий: притяжение и отталкивание

**Георг Вильгельм Рихман (1711- 1753 гг.).** 1745-1751 гг. – ему принадлежат первые попытки «измерить электричество». Это привело к изобретению электрометра (электрометры были созданы во второй половине XIX века). Ему принадлежит статья «Новые опыты с электричеством, порождаемым в телах». Рихман исследовал электрическую природу молнии. Его опыты с электричеством грозы привели к трагической гибели ученого 26 июля 1753 года.

**Вениамин (Бенджамин) Франклин (1706 – 1790 гг.).** Франклин пользовался представлением «электрического огня», как особой электрической субстанции. Он предполагал, что этот электрический огонь является распространенным элементом, который все тела имеют в равном

количестве до процесса электризации. Труд «Опыты и наблюдения над электричеством». Один из первых опытов – опыт электризации чугунного шара, помещенного на горлышке чистой сухой стеклянной бутылки. В ходе этого опыта, Франклин установил действие проводящего острия, который разряжал шар, и светился в темноте при разряде. Ввел представление о положительном и отрицательном электричестве. Франклин показал, что электрическая атмосфера обволакивает шар равномерно, с остриев ее легче отобрать, чем с граней. Он продемонстрировал на опытах стекание электричества с острия. Закон сохранения электрического заряда является основным в теории Франклина. Сконструировал «колесо Франклина» - модель электростатического двигателя. Изучая молнию, Франклин провел знаменитый опыт с воздушным змеем, запуская его при приближении грозных туч. Именно ему принадлежит идея громоотвода.

Франклин употребляя термины «электрик» и «неэлектрик», критиковал их как неверные. И утверждал, что они должны быть заменены понятиями «проводник» и «непроводник». Однако термины «электрик» и «неэлектрик» держались довольно долго и были заменены лишь в первой половине XIX века терминами «проводники» и «изоляторы».

**Михаил Васильевич Ломоносов (1711 – 1765 гг.).** Установил с помощью электрического указателя электрическое состояние атмосферы в отсутствие грома и молнии.

**Франц Ульрих Теодор Эпинус (1724 – 1802 гг.).** 1759 г. – книга «Опыт теории электричества и магнетизма». В этой книге он рассматривал электрические явления и магнетизм. Открыл полярную электризацию турмалина при нагревании (пироэлектричество), обратил внимание на сходство данного кристалла с магнитом. В основу своей теории Эпинус положил представление об электрической и магнитной жидкостях, частицы которых взаимодействуют с материей и между собой силами притяжения и отталкивания. Эпинус отмечает, что тела делятся на два класса, которые хорошо проводят электрическую материю (не электрические по своей природе) и которые препятствуют ее свободному перемещению (электрическими по своей природе).

**Джозеф Пристли (1733 - 1804).** В 1767 году в работе «История электричества» высказал предположение, что силы взаимодействия электрических частиц обратно пропорциональны квадрату расстояния.

**Лорд Кавендиш (1731-1810 гг.).** 1771 год – впервые экспериментально показал, что силы взаимодействия электрических зарядов подчиняются закону  $1/r^n$ , где  $n = 2 \pm 1/50$ .

**Шарль Огюстен Кулон (1736-1806 гг.).** В 1784 году сконструировал прибор крутильные весы. С помощью этого прибора он открыл закон взаимодействия зарядов и закон взаимодействия магнитных полюсов.

**Возникновение электродинамики.** Первые исследования в области электричества и магнетизма относились к электростатике и стационарным магнитным полям. Успехи электростатики способствовали усовершенствованию приборов и аппаратов, появлению чувствительных электроскопов, в том числе электроскоп Вольты с соломинками, снабженный конденсатором (1782), электроскоп Беннета с золотыми листочками (1787). Дальнейшие экспериментальные исследования электрических и магнитных явлений привели к появлению в физической науке новых понятий «электрический ток» и «электрическая цепь», которые ввел Андре Мари Ампер.

#### **Обнаружение и исследование новых электрических и магнитных явлений.**

**Луиджи Гальвани (1737 – 1798 гг.).** 1791 год – «Трактат о силах электричества при мышечном движении».

**Алессандро Вольта (1745 – 1827 гг.).** 1775 год – ввел в науку понятие «напряжение». Установил связь между количеством электричества, емкостью и напряжением. 1783 год– изобрел электрофорную машину, эвдиометр и другие приборы. Изобрел электроскоп с конденсатором. 1792 год– начинает заниматься «животным электричеством», изобретает первый гальванический элемент. 1800 год– он создал первый генератор электрического тока – вольтов столб.

**Вильям Никольсон (1753 – 1815 гг.) и Антоний Карлейль (1768 – 1840 гг.).** Построили вольтов столб из семнадцати элементов и осуществили электролиз воды, показав химическое действие тока.

**Василий Владимирович Петров (1761 – 1834 гг.).** 1801 год - «Собрание физико-химических новых опытов и наблюдений». 1803 год- «Известие о гальвани – вольтовских опытах». 1804 год «Новые электрические опыты». Открыл и исследовал электрическую дугу.

**Ханс Кристиан Эрстед (1777 – 1851 гг.).** 1813 г – трактат «Исследования о тождестве электрических и химических сил». 1820 год– сделал свое знаменитое открытие, которое описал в брошюре «Опыты, относящиеся к действию электрического конфликта на магнитную стрелку». Эрстед, таким образом, обнаружил магнитное поле вокруг проволоки с током, которое действовало на ток.

**Био и Савар и Лаплас.** 1820 г. Био и Савар экспериментально установили действия тока на магнитный полюс, Лаплас придумал этому закону математическую форму.

**Андре Мари Ампер (1775 – 1836 гг.).** Ввел название «электродинамика» для новой области физики. 1826 год - труд «Теория электродинамических явлений, выведенная исключительно из опыта». Ампер впервые ввел такие фундаментальные понятия как «электрический ток», «электрическая цепь», установил направление тока в замкнутой цепи. Он установил механическое взаимодействие токов.

**Томас Зеебек (1770 – 1831 гг.).** В 1821 году - открыл термоэлектричество.

**Георг Ом (1787 – 1854 гг.).** Открыл количественный закон цепи электрического тока, носящий его имя.

**Майкл Фарадей (1791 – 1867 гг.).** 1821- 1822 гг. – статья «Опыт истории электромагнетизма». Труд «Экспериментальные исследования по электричеству». Открыл явление электромагнитной индукции. Проведя множество опытов, Фарадей пришел к выводу, что «способность индуцировать токи проявляется по окружности вокруг магнитной равнодействующей или силовой оси точно так, как расположенный по окружности магнетизм возникает вокруг электрического тока и им обнаруживается». Установленную Фарадеем связь, позднее математически выразил Дж. Максвелл. В 1833 году изучал химическое действие тока, открыл закон электролиза. М. Фарадей ввел новую терминологию: электроды он назвал катодом и анодом, разложимые вещества электролитами, вещества, на которые разлагаются электролиты – ионами. Также он искал превращения света в магнетизм, тяготения – в электричество и магнетизм. Фарадей описал влияние магнитного поля на различные среды и открыл диамагнетизм и парамагнетизм, и ввел данные термины. Фарадей ввел в физику особый вид материи – поле, отказавшись от концепции действия на расстоянии.

**Эмиль Ленц (1804 – 1865 гг.).** 1833 год – работа «Об определении направления гальванических токов, возбуждаемых электродинамической индукцией».

Экспериментальные исследования электрических и магнитных явлений приводили к необходимости введения новых понятий, новых физических величин, определяющих и количественно характеризующих обнаруживаемые явления, к формулировке законов, определяющих взаимные связи этих величин. Так в физике появились понятия «электрический заряд», «электрическое и магнитное поля» и соответствующие им характеристики (напряженность и индукция электрического и магнитного полей), которые до сих пор используются в науке, знание и понимание которых необходимо для понимания изучаемых явлений. С введения этих понятий начинается изучение электричества и магнетизма [3; 6].

В упомянутых выше литературных источниках вводятся терминология раздела физики «электричество и магнетизм», соответствующие определения, единицы измерения физических величин, излагается объяснение некоторых явлений. Остановимся на некоторых вопросах, связанных с дальнейшим развитием физики, в частности, со специальной теорией относительности (СТО) А. Эйнштейна.

## 1.5 Электрический заряд, его свойства

Известно, что заряды бывают двух видов (положительные и отрицательные), взаимодействуют между собой (притяжение/отталкивание), не существуют без материального носителя. Одним из основных свойств заряда является его дискретность. Материальным носителем элементарного отрицательного заряда является электрон, положительного – протон, их заряд по модулю, то есть минимальный электрический заряд равен  $1,6021766208 \cdot 10^{-19}$  Кл [20]. Электрический заряд подчиняется закону сохранения. Заряд может переходить с одного тела на другое в равных количествах, так что общая сумма зарядов является величиной постоянной:

$$q_1 + q_2 + \dots + q_n = \text{const.}$$

Дискретный электрический заряд  $q$  определяется квантовым числом  $n$ :

$q = ne$ ,  $e$  – модуль элементарного заряда (электрона или протона),  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Сохранение электрического заряда означает сохранение квантового числа  $n$ . Сохранение квантового числа регулирует протекание реакций между элементарными частицами. В этих реакциях количество элементарных зарядов до и после реакции должно быть равным. Закон сохранения заряда проверен экспериментально. Но любой эксперимент имеет погрешность. Следовательно, нельзя считать, что этот закон точно подтвержден. На закон сохранения заряда указывают многие физические явления,

объяснить которые можно только при условии, что этот закон выполняется. Одним из проявлений закона сохранения заряда считается стабильность электрона. Электрон – самая легкая заряженная частица, поэтому он может распадаться только по схеме  $e^- \rightarrow \nu_e + \gamma$ , где  $\nu_e$  – электронное нейтрино,  $\gamma$  – фотон. Но справа незаряженные частицы, следовательно, если электрон распадается по этой схеме, то закон сохранения заряда нарушается. Если предположить, что распадается электрон атома, то на его место приходит другой электрон и так далее, в результате атомы должны испускать  $\nu_e$  и  $\gamma$ . Существование этих частиц пытаются обнаружить экспериментально. Если они будут обнаружены, то это будет указывать на нестабильность электрона и, следовательно, на нарушение закона сохранения заряда.

Проведенные эксперименты не обнаружили ожидаемых частиц распада, но с учетом погрешности эксперимента и статистического характера распада по результатам эксперимента ученые делают вывод, что если электрон и не стабильный, то его время жизни должно быть больше, чем  $10^{22} - 10^{23}$  лет. Продолжительность существования Вселенной от момента Большого взрыва оценивается как  $2 \cdot 10^{10}$  лет, то есть по этим результатам можно считать электрон стабильным. Однако полной уверенности в стабильности электрона у ученых нет, тем не менее закон сохранения электрического заряда принимается как один из фундаментальных законов природы.

Закон сохранения электрического заряда является одним из фундаментальных законов природы. К этому закону приводят глубокие теоретические соображения. Например, Ю.Вигнер указал на связь сохранения электрического заряда с невозможностью существования вечного двигателя. Анализируя явления распада ускоренного электрона на нейтральное нейтрино и фотон, и возможные обратные образование из них электрона, он показывает, что при таком процессе закон сохранения заряда может не выполняться. Неоднозначность скалярного и векторного потенциалов, определяющих одно и тоже электромагнитное поле, законы сохранения энергии и заряда содержатся в уравнениях электродинамики, справедливость которых подтверждена в границах области ее применимости. Невыполнимость одной из указанных составляющих должно поставить под сомнение электродинамику.

Во многих случаях дискретностью электрического заряда можно пренебречь, если рассматривается область, размеры которой много больше расстояния между зарядами. При таких условиях вводится понятие объемной плотности заряда:

$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}$ , где  $\Delta q$  – заряд, находящийся в объеме  $\Delta V$ . Для такого непрерывно распределенного заряда закон сохранения заряда записывается в дифференциальной форме. Если заряды втекают или вытекают из данного объема  $V$ , через ограничивающую этот объем поверхность  $S$ , то поток плотности тока через  $S$ :

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}, \quad q = \int_V \rho dV.$$

Используя теорему Остроградского-Гаусса  $\oint_S \vec{j} d\vec{S} = \int_V \text{div } \vec{j} dV$ , получаем

$$\int_V \left( \text{div } \vec{j} dV + \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \right) = 0.$$

Данный интеграл может равняться нулю, если подынтегральная функция знакопеременная, так что сумма всех ее значений оказывается равной нулю, или при условии, что подынтегральная функция равна нулю во всех точках области интегрирования. В математике доказывается, что около каждого значения функции существует окрестность, в пределах которой она знака не меняет. Равенство интеграла нулю должно выполняться для произвольного объема  $V$ , в том числе для сколь угодно малого, в пределах которого подынтегральная функция знака менять не может. Таким образом, чтобы интеграл равнялся нулю при любых объемах  $V$  необходимо, чтобы была равна нулю подынтегральная функция.

$$\text{div } \vec{j} dV + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 - \text{закон сохранения заряда в дифференциальной форме.}$$

Этот закон записан при условии, что дискретностью заряда пренебрегается, то есть заряд считается непрерывным. Если учесть, что  $q$  квантован, то есть  $q=ne$ , то условие сохранения заряда записывается в дискретной форме.

Обратим внимание еще на одну особенность электрического заряда, которая выявлена в СТО. Оказывается, что объемная плотность  $\rho$  электрического заряда является величиной относительной. Ее величина зависит от скорости движения заряда относительно наблюдателя (прибора, регистрирующего этот заряд). Пусть  $\rho_0$  – объемная плотность заряда относительно системы отсчета, в которой заряд неподвижен (заряд неподвижен относительно наблюдателя);  $\rho$  – объемная плотность заряда в системе отсчета, относительно которой заряд движется со скоростью  $\vartheta$ . Согласно СТО эти величины связаны соотношением:

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}}}$$

Полученная в СТО формула показывает, что объемная плотность заряда зависит от скорости его движения: с увеличением скорости она возрастает. Но величина полного заряда подчиняется закону сохранения. Отсюда возникает вопрос, не противоречит ли зависимость плотности заряда от скорости закону сохранения заряда. Чтобы объяснить сложившуюся ситуацию необходимо обратить внимание еще на одну формулу СТО, которая показывает зависимость объема тела от скорости его движения:

$$V = V_0 \sqrt{1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}}$$

Полный заряд тела  $q = \int_V \rho(x, y, z) dV$ . В простейшем случае при равномерном распределении заряда  $q = \rho V$ . Из последней формулы видно, что зависимости плотности заряда и занимаемого им объема от скорости взаимно компенсируются: с увеличением скорости плотность увеличивается, а объем уменьшается в одинаковое число раз. Следовательно, величина полного заряда тела или системы тел относительно любой системы отсчета одинакова, то есть эта величина является абсолютной или инвариантной.

## 1.6 Электрическое и магнитное взаимодействие электрических зарядов

Первым законом в истории изучения электромагнетизма является закон взаимодействия неподвижных зарядов. Это электростатическое взаимодействие зарядов определяется законом Кулона  $F_{стат} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$ . Магнитное взаимодействие было обнаружено Ампером как взаимодействие токов. Но электрический ток – это движение электрических зарядов. Поэтому учеными был сделан вывод, что между движущимися зарядами существует не только электрическое, но и магнитное взаимодействие. Магнитное взаимодействие возникает, при условии, что заряды движутся. Поскольку это взаимодействие также создают заряды, то магнитное взаимодействие можно рассматривать как электрическое взаимодействие дополнительное к электростатическому вследствие движения зарядов.

Посмотрим, как можно объяснить взаимодействие движущихся зарядов. При движении зарядов их взаимодействие отличается от электростатического. Дополнительное взаимодействие, обусловленное движением, называется магнитным. Полное взаимодействие в этом случае называется электромагнитным. Рассмотрим два заряда  $q_1$  и  $q_2$ , расстояние между которыми в некоторый момент времени равно  $r$ ,  $\vartheta$  – скорость движения заряда  $q_1$  относительно заряда  $q_2$  (рисунок 1.1). Каждый заряд находится в электрическом поле другого заряда.

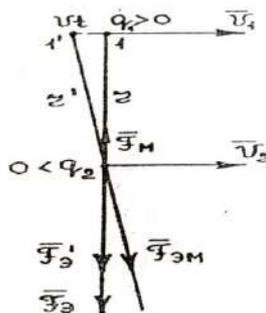


Рисунок 1.1 Электрическое и магнитное взаимодействие электрических зарядов

Если бы поле распространялось с бесконечной скоростью, то напряженность поля в данной точке в данный момент соответствовала бы расположению заряда, создающего поле в этот же момент. Но скорость распространения поля равна  $c$ . Поэтому поле заряда  $q_1$ , в точке, где находится заряд  $q_2$  отстает от положения заряда  $q_1$ . В момент данного расположения зарядов, заряд  $q_2$  находится в поле заряда  $q_1$ , которое он создавал, находясь на расстоянии  $r'$ , поэтому закон Кулона запишется:

$$F_{ЭМ} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r'^2}$$

Если время  $t$  - мало, то считая треугольник прямоугольным, по теореме Пифагора

$$\left( \begin{array}{l} (r')^2 = r^2 + \vartheta_1^2 t^2, \\ r^2 = (r')^2 - \vartheta_1^2 t^2 = (r')^2 - \vartheta_1^2 \left(\frac{r'}{c}\right)^2 = (r')^2 \left(1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}\right) \\ \Rightarrow r' = \frac{r}{\sqrt{1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}}} \\ F_{ЭМ} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \left(1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}\right) \end{array} \right)$$

Интересно отметить, что полученная формула отличается от формулы, соответствующей неподвижным зарядам, наличием множителя, который играет большую роль в релятивистской физике. Разложим полученную формулу на два слагаемых:

$$F_{ЭМ} = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}}_{F_Э} - \underbrace{\frac{\vartheta^2}{c^2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}}_{F_М}$$

Таким образом, формула Кулона для движущихся зарядов оказалась состоящей из двух слагаемых, одно из которых (электрическое) подобно электростатическому взаимодействию (расстояние  $r$  соответствует моменту измерения), второе – магнитное взаимодействие, существование которого является результатом движения зарядов. Учтем, что  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  и запишем

$$F_М = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q_1 \vartheta q_2 \vartheta}{r^2}.$$

Перейдем к векторной записи силы магнитного взаимодействия. Введем единичный вектор  $\vec{r}_{e0}$  направления. Зная связь направления силы магнитного взаимодействия с направлением скоростей движения зарядов и вектора  $\vec{r}_{e0}$  и формулу векторного произведения векторов, запишем:

$$\vec{F}_М = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q_1 \vec{\vartheta}_1 \times (q_2 \vec{\vartheta}_2 \times \vec{r}_{e0})}{r^2}.$$

Здесь введены индексы для скоростей зарядов с целью удобства, так как они, в принципе, могут быть различны; знак « $\times$ » - обозначает векторное произведение.

Согласно закону Био-Савара-Лапласа выражение

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q \vec{\vartheta} \times \vec{r}_{e0}}{r^2}$$

соответствует индукции магнитного поля движущегося заряда на расстоянии  $r$  от него. В этом поле оказывается другой заряд:

$$\vec{F}_М = q \vec{\vartheta} \times \vec{B}.$$

Это выражение является формулой магнитной составляющей силы Лоренца. Обратим внимание на то, что анализ взаимодействия начинался с рассмотрения взаимодействия двух движущихся зарядов, которые оказалось представленным в виде двух слагаемых, каждое из которых

содержало электрические заряды. Второе слагаемое было дополнительным к известному кулоновскому взаимодействию неподвижных зарядов, и его предположительно назвали магнитным. Это предположение подтвердилось преобразованиями, которые, в конечном счете, позволили свести его к известному действию магнитного поля на движущийся заряд. Таким образом, можно сделать вывод, что действительно взаимодействие движущихся зарядов отличается от взаимодействия неподвижных зарядов тем, что вокруг движущихся зарядов существует магнитное поле, которое оказывает действие на другой движущийся заряд. Таким образом, магнитное взаимодействие можно рассматривать как изменение электрического взаимодействия зарядов, обусловленное их движением:

$$F_{\text{м}} = F_{\text{э}} - F_{\text{эм}} = \frac{v^2}{c^2} F_{\text{э}}.$$

Из формулы видно, что  $\frac{F_{\text{м}}}{F_{\text{э}}} = \frac{v^2}{c^2}$ , то есть, если  $v \ll c$ , то  $F_{\text{м}} \ll F_{\text{э}}$ . Поэтому, если скорость движения зарядов небольшая, то для вычисления силы взаимодействия зарядов с достаточной точностью можно пользоваться законом Кулона для неподвижных зарядов.

После создания теории электромагнитного поля Максвеллом, взаимодействие зарядов стали рассматривать как единое электромагнитное взаимодействие. Но оно может проявляться и только как электрическое, если заряды неподвижны, и только как магнитное, например, взаимодействие проводников с постоянным током. При постоянном токе проводники остаются электронейтральными, поэтому электрическое взаимодействие между зарядами, входящими в их состав взаимно компенсируется. Как отмечено выше, магнитное взаимодействие движущихся зарядов значительно меньше электрического, если скорость движения зарядов невелика. Скорость упорядоченного движения электронов в проводниках порядка  $10^2$  м/с, то есть очень мала, значительно меньше скорости света. Но магнитное взаимодействие токов достаточно сильное. Это является результатом очень большого количества свободных зарядов, упорядоченное движение которых создает ток.

Можно отметить, что магнитное взаимодействие, которое оказалось связанным с существованием электрических зарядов, было открыто как самостоятельное взаимодействие. Оно было обнаружено на ископаемых рудах, намагниченных магнитным полем Земли, и только позже было обнаружено для проводников с электрическим током и для движущихся зарядов.

## 1.7 Электромагнитное поле. Квантовая электродинамика

**Электромагнитное поле (ЭМП).** Электрические и магнитные явления были открыты в глубокой древности и долгое время рассматривались как явления статические. Явления рассматривались в зависимости от расстояния от зарядов, которое было неизменным. Для их исследования достаточно было знания характеристик материальных объектов и расстояний. Интересно было только то, как заряженные тела взаимодействуют на расстоянии, но для расчетов это значения не имело. Поэтому в понятии «поле», его существовании особой необходимости не было. Понятие поле больше было философским понятием, а для определения законов неподвижных зарядов, постоянных токов, магнитов понятие поле не использовалось. Для расчетов взаимодействия достаточно знать заряды, токи и расстояния между ними. Проблема существования поля возникла, когда опытные законы взаимодействия были установлены и возник вопрос о механизме взаимодействия, то есть каким образом один заряд или один ток знают о существовании другого заряда или тока на некотором расстоянии. До некоторого этапа развития физики принималась теория дальнего действия, которая утверждала действие одного объекта на другой на расстоянии без всякого посредника (в сущности эта теория предполагает, что если посредник взаимодействия существует, то он должен двигаться с бесконечно большой скоростью). В принцип действия на расстоянии не вписывалось обнаруженное М.Фарадеем явление электромагнитной индукции. Можно сказать, что именно это явление способствовало коренному изменению научного мировоззрения. В физику вошло новое фундаментальное понятие **«поле»**. Это поле электрическое и магнитное как особое состояние пространства. Современники М.Фарадея оценили открытие электромагнитной индукции (ЭМИ), его практическую значимость, но они не обратили внимание на то, что именно в связи с ЭМИ Фарадей рассматривал концепцию поля, как особого состояния окружающего пространства или среды.

Гений Дж.Максвелла превратил учение об электричестве и магнетизме, в том числе и учение М.Фарадея, в стройную систему с четырьмя основными дифференциальными уравнениями. Современную форму этим уравнениям для вакуума дали Г.Герц и О.Хевисайд.

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (1.4)$$

**Первое уравнение** утверждает, что изменяющееся во времени магнитное поле создает вихревое электрическое поле. Это уравнение является дифференциальной формой закона ЭМИ. Явление ЭМИ, то есть появление замкнутого вихревого электрического поля при изменении магнитного, открыто М.Фарадеем в 1831 году (до Фарадея в 1830 году это явление было обнаружено Дж.Генри, по-видимому это открытие оставалось неизвестным).

**Второе уравнение** утверждает, что вихревое магнитное поле создается токами проводимости  $\vec{j}$  и изменяющимся во времени электрическим полем. Ток проводимости  $\vec{j}$  – это обычный ток, создаваемый движущимися зарядами. Магнитное действие тока обнаружено и исследовано в 1820 году Х.Эрстедом и А.Ампером и другими. В теории Максвелла к слагаемому  $\vec{j}$  добавилось выражение  $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ . Но слагаемые по смыслу должны быть одинаковыми, поэтому Максвелл выдвинул гипотезу, что изменяющееся во времени электрическое поле создает магнитное поле подобно току  $\vec{j}$ . Он назвал это слагаемое током смещения

$$\vec{j}_{\text{смещ}} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

**Третье уравнение** показывает, что источником вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$  являются объемные заряды. Линии поля начинаются на положительных зарядах (точки источника) и заканчиваются на отрицательных (точки стока) или уходят в бесконечность.

**Четвертое уравнение** означает, что линии индукции  $\vec{B}$  магнитного поля замкнуты, то есть поле  $\vec{B}$  не имеет источников и стоков. Отсутствие источников и стоков линий индукции магнитного поля означают только то, что линии поля замкнуты. Но магнитное поле имеет источники в том смысле, что что-то его создает – движущиеся заряды и переменное электрическое поле. **Система уравнений Максвелла** – это основа классической электродинамики, она связывает характеристики поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  с источниками, то есть с  $\rho$  и  $\vec{j}$ .

**Примечание:** слагаемое  $\vec{j}$  во втором уравнении, то есть утверждение о том, что вихревое магнитное поле создается токами проводимости, это фактически результат опыта Эрстеда, в котором он обнаружил действие проводника с током на магнитную стрелку.

Гипотеза Максвелла о том, что переменное электрическое поле создает вихревое магнитное поле – это явление обратное ЭМИ. Таким образом, в теории Максвелла переменные поля не могут существовать только как электрическое или только как магнитное, потому что они порождают друг друга. И далее Максвелл показал, что переменное ЭМП распространяется в пространстве в виде волн. Сумма  $\vec{j} + \vec{j}_{\text{смещ}} = \vec{j}_{\text{полн}}$ ; эта сумма дает замкнутый ток. Известно, например, что постоянный ток через конденсатор не проходит, так как в пространстве между его обкладками находится диэлектрик, в котором нет свободных зарядов, то есть фактически такой конденсатор разрывает цепь постоянного тока. Но, если конденсатор включен в цепь переменного тока, то он не разрывает цепь, ток по цепи идет, заполненное диэлектриком пространство между обкладками замыкается токами смещения.

Завершением классической электродинамики Фарадея и Максвелла можно считать СТО. В этой теории выяснилась сущность двух видов поля электрического и магнитного, которая состоит в том, что они представляют собой единый объект – электромагнитное поле, которое только при определенных условиях относительно определенных систем отсчета может наблюдаться или как электрическое, или как магнитное. Это можно показать с помощью некоторых инвариантов, которые получены в СТО для характеристик ЭМП. Инварианты – это величины, которые одинаковы относительно всех инерциальных систем отсчета (ИСО). К таким инвариантам в СТО относятся

$$I_1 = E^2 - c^2 B^2,$$

$$I_2 = (\vec{B}\vec{E}).$$

Пусть в некоторой системе отсчета  $I_1 > 0 \Rightarrow E^2 > c^2 B^2$ . **Может ли существовать такая ИСО относительно которой поле проявляется или только как электрическое или только как магнитное?**

$$I_2 = 0, \quad \vec{B} \perp \vec{E}.$$

**Ответ:** Может существовать ИСО, относительно которой поле только электрическое, но нет такой ИСО, относительно которой поле регистрировалось только как магнитное.

Таким образом, электрическое и магнитное поля как составляющие единого электромагнитного поля относительны. Их характеристики различны относительно различных ИСО и могут быть преобразованы от одной ИСО к другой по определенным формулам. Но инварианты, характеризующие единое ЭМП являются абсолютными.

Уравнения Максвелла при своем «рождении» оказались релятивистскими, то есть они инвариантны не к преобразованиям Галилея, а к преобразованиям Лоренца. Но после работ Эйнштейна и Пуанкаре по СТО требования релятивистской инвариантности предъявляются к любой теории, которая разрабатывается в настоящее время, на инвариантность к преобразованиям Лоренца. Классическая электродинамика завершилась в период, когда уже зарождалась квантовая физика. 14 декабря 1900 года в немецком физическом обществе Макс Планк доложил о квантах энергии излучения. Очередным этапом развития электродинамики стала квантовая электродинамика.

**Квантовая электродинамика (КЭД).** Квантовая электродинамика – это квантовая теория электромагнитных взаимодействий. Классическая электродинамика Фарадея и Максвелла целиком опиралась на опыты с дополнением некоторых гипотез. КЭД разрабатывалась теоретиками, целью которых было объединение двух фундаментальных теорий классической электродинамики и квантовой механики. Результатом такого объединения должна была стать принципиально новая третья фундаментальная теория - квантовая электродинамика. Но в процессе своего развития КЭД не только использовала теоретические методы, но и использовала очень сложные, трудоемкие эксперименты, в которых требовалась очень высокая точность измерений.

Основными фундаментальными величинами в КЭД являются  $c$  – скорость света и  $h$  – постоянная Планка, которые с учетом малости некоторых эффектов, исследуемых КЭД, должны быть определены с очень высокой точностью. А.Зоммерфельд ввел константу  $\lambda = \frac{e^2}{hc}$ , в которую вошли постоянная  $e$  - как представитель электронной теории,  $h$  - основа квантовой механики, а  $c$  - из специальной теории относительности. В КЭД важна также масса электрона. Знание фундаментальных констант позволяет рассчитывать конкретные эффекты квантовой электродинамики. Фундаментальная роль величин  $h$ ,  $c$ ,  $e$ ,  $m_e$  в квантовой электродинамике и во всей современной физике требует уточнения их значений, что и проводится с развитием техники физического эксперимента.

Развитие представлений о свете, гипотеза де Бройля привели к разработке метода квантование полей, которые позволяли описывать процессы рождения и уничтожения электронов, позитронов, фотонов. Такие процессы рассматриваются в КЭД, но оказалось, что в ряде случаев применение такого метода становилось невозможным. Проблема состояла в том, что в расчетах процессов появлялась бесконечность, но бесконечность физического смысла не имеет. Такие бесконечности появлялись в теории в случае рассмотрения быстроменяющихся во времени и в пространстве полей. Конечная причина этого была в предположении о точечных электрических зарядах.

Проблема бесконечностей была и в классической физике. Например, напряженность поля точечного заряда  $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ . Если  $r \rightarrow 0$ , то  $E \rightarrow \infty$ , а плотность энергии поля определяется как  $\omega = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} \rightarrow \infty$ . Но энергия бесконечностью быть не может. Такой результат появился вследствие того, что заряд принимается за точечный. Если предположить, что заряд не точечный, а распределен по некоторой области пространства, то бесконечности не получится. Поэтому в классической электродинамике было введено понятие классического радиуса электрона, который в предположении, что вся масса электрона или ее часть имеют электромагнитное происхождение, оказывается величиной порядка  $10^{-13}$  см. Величина классического радиуса электрона является нижней границей применимости классической электродинамики.

В 40-х годах XX века ряд ученых, в том числе Р.Фейнман, Х.Бете, выдвинули идею борьбы с бесконечностью. Они предложили отождествить сумму бесконечных членов с наблюдаемой конечной величиной. Такая процедура называется *перенормировкой*. Ученые считают, что причина появления расходимости, то есть бесконечности, не в физике, а в применяемом теоретическом аппарате. Предлагаются различные способы борьбы с расходимостями (с бесконечностями), то есть различные пути перенормировки. Разрабатываемая физическая теория должна быть перенормированной. Поэтому к любой квантовой теории к требованиям релятивистской инвариантности добавляется требование перенормируемости. При доказательстве перенормируемости КЭД главную роль играет требование калибровочной инвариантности, которая рассмотрена далее.

**Калибровочная инвариантность.** В теорию электромагнитного поля Дж.Максвелла, кроме рассмотренных выше четырех основных уравнений, определяющих связь зарядов, электрических и магнитных полей, их изменений, входят закон сохранения энергии, заряда, а также неоднозначные потенциалы: скалярный потенциал  $\varphi$  и векторный потенциал  $\vec{A}$ . Эти потенциалы были введены при изучении электростатического и магнитного полей  $\vec{E} = -\mathbf{grad} \varphi, \vec{B} = \mathbf{rot} \vec{A}$ .

**Пояснение:** известно, что электростатическое поле не вихревое, то есть его линии не замкнуты. Работа поля по перемещению заряда по замкнутой траектории в таком случае равна нулю, а по незамкнутой - определяется только положением начальной и конечной точек, для характеристики состояния которых введен потенциал  $\varphi$ .  $\vec{A} = \mathbf{q}(\varphi_1 - \varphi_2)$ . Такие поля называются потенциальными. Сам потенциал  $\varphi$  смысла не имеет, смысл имеет разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A}{q}$ . Разность потенциалов между двумя точками определяет работу поля по перемещению единичного положительного заряда между этими точками. Дифференциальное условие потенциальности электростатического поля, то есть его невихревого характера, записывается как:  $\mathbf{rot} \vec{E} = \mathbf{0}$ , но математически можно показать, что ротор градиента любого скалярного поля равен нулю:  $\mathbf{rot} \mathbf{grad} \varphi = \mathbf{0}$ . Следовательно:  $\vec{E} = -\mathbf{grad} \varphi$ . Знак «минус» не является следствием математического аппарата, он отражает историческую особенность введения физических характеристик поля. Вектор  $\vec{E}$  перпендикулярен к эквипотенциальным поверхностям, направлен в сторону убывания потенциала, а градиент скалярного поля, определяющий скорость его изменения в пространстве, имеет направление в сторону возрастания потенциала.

Потенциалы  $\varphi$  и  $\vec{A}$  определены не однозначно, так как являются результатом решения дифференциальных уравнений в частных производных. Прибавление произвольной постоянной к потенциалу поля не меняет значений векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , которые могут быть измерены экспериментально. Например, пусть потенциалы  $\varphi$  и  $\vec{A}$  определяют поле  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$

$$\vec{E} = -\mathbf{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \mathbf{rot} \vec{A}$$

Введем другие потенциалы:

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad \vec{A}' = \vec{A} + \mathbf{grad} \Psi.$$

Тогда

$$\vec{B}' = \mathbf{rot} \vec{A}' = \mathbf{rot}(\vec{A} + \mathbf{grad} \Psi) = \mathbf{rot} \vec{A} + \underbrace{\mathbf{rot} \mathbf{grad} \Psi}_0 = \mathbf{rot} \vec{A} = \vec{B}$$

$$\vec{E}' = -\mathbf{grad} \left( \varphi - \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\mathbf{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{grad} \Psi = \vec{E}$$

Здесь учтено, что если в поле отсутствуют тела, движущиеся со скоростью  $\mathbf{v} \sim \mathbf{c}$ , то координаты и время взаимно независимы, и можно менять очередность операций производных по координатам и производных по времени.

**Примечание:** возникает вопрос о функции  $\Psi$ , с помощью которой вводится неоднозначность потенциала. В электродинамике Дж.Максвелла доказывается, что это должна быть непрерывная функция, удовлетворяющая волновому уравнению  $\Delta \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \mathbf{0}$ .

Прибавление произвольной постоянной к потенциалам является частным случаем калибровочной инвариантности или частным случаем градиентных преобразований. Использование калибровочных преобразований очень широко применяется в современной физике. Особенно важный физический смысл имеют те величины, которые не изменяются при калибровочных преобразованиях. Это означает, что калибровочную инвариантность электромагнитного поля позволяет перейти от  $\varphi$  и  $\vec{A}$  к  $\varphi' + \vec{A}'$ , не изменяя вектора поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ . Неоднозначность потенциалов ЭМП позволяет наложить еще одно дополнительное условие:  $\varphi = 0$ . Тогда для определения  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  достаточно одного векторного потенциала, то есть трех его скалярных проекций, которые должны быть заданы, в каждой точке поля.

В электродинамике существует понятие свободного поля. *Свободное поле* – это часть поля, создаваемого ускоренно движущимися зарядами, которое отрывается от источника и распространяется в пространстве в виде электромагнитных волн, независимо от того, что происходит с источником после излучения этих волн. Теория позволяет для свободного поля использовать только две независимых переменных вместо четырех ( $\varphi, A_x, A_y, A_z$ ). В этом случае электромагнитное поле оказывается поперечным и может иметь правую и левую поляризацию. В квантовой теории поля такой ситуации соответствует два возможных состояния фотона, отличающихся ориентацией спина: 1) спин параллелен импульсу фотона; 2) спин антипараллелен импульсу фотона. Квант любого векторного поля имеет спин равный единице, но единица дает три проекции  $0; \pm 1$ , тогда возникает вопрос почему у спина фотона нет нулевой проекции. Теоретически доказывается, что состояние с нулевой проекцией невозможно, если масса покоя частицы равна нулю. Из общих принципов квантовой теории следует также, что для частиц, движущихся с  $v = c$ , у спина может быть только две проекции. Калибровочная инвариантность уравнений электромагнитного поля теоретически приводит к нулевой массе кванта этого поля, то есть фотона. Отсюда делается вывод, что все фотоны, а в классической теории – электромагнитные волны, движутся с фундаментальной скоростью  $c$ . Распространение электромагнитных волн с такой скоростью следовало из уравнений Дж.Максвелла и стало одной из причин, приведших к созданию СТО. Ученые отмечают удивительную особенность природы, физического мира, в котором оказались взаимно связанными, казалось бы, различные фундаментальные явления: сохранение заряда, релятивизм и калибровочная инвариантность, закон сохранения энергии.

Калибровочная инвариантность важна при построении теории любого поля. Она использовалась при создании объединенной теории электрослабых взаимодействий, при разработке теории сильных взаимодействий (квантовая хромодинамика), в теории великого объединения сильного, слабого и электромагнитного взаимодействий. В настоящее время разрабатывается теория квантовой гравитации, подходы к которой также ищут с помощью калибровочной инвариантности. КЭД стала первой простейшей теорией квантового калибровочного поля. На ее примере отрабатываются более сложные поля.

## 1.8 О массе фотона

Одним из важных вопросов для современной физики является вопрос о том, имеет ли фотон нулевую массу покоя. От ответа на этот вопрос зависят многие выводы теоретической физики, в том числе связанные с происхождением и развитием Вселенной. Поэтому ученые не оставляют этот вопрос без внимания. Выдвигаются различные методы обнаружения ненулевой массы покоя фотона, если она существует. Один из предлагаемых методов – исследования дисперсии электромагнитных волн в вакууме. С точки зрения современной физики дисперсии электромагнитных волн в вакууме нет, то есть скорость не зависит от длины волны или частоты. Такое утверждение справедливо для частиц с нулевой массой покоя. Фотон с нулевой массой нельзя не остановить, ни замедлить, он может двигаться только со скоростью  $c$ . Это следует из известной формулы связи энергии с импульсом

$$E = c \sqrt{m_\gamma^2 c^2 + p^2}. \text{ Если } m_\gamma = 0, \text{ то } E = pc; \text{ Если } m_\gamma \neq 0, \text{ а } p = 0$$

(частица неподвижна), то  $E = m_\gamma c^2$ . Скорость частицы вычисляется как производная энергии по импульсу

$$\vartheta = \frac{dE}{dp} = \frac{pc}{\sqrt{m_\gamma^2 c^2 + p^2}}.$$

Для медленных частиц с ненулевой массой покоя получается нерелятивистская формула  $\vartheta = \frac{p}{m_\gamma}$ ; для частиц с нулевой массой покоя  $m_\gamma = 0$  получается  $\vartheta = c$  не зависимо от импульса. Если  $m_\gamma \neq 0$ , то всегда скорость фотона  $\vartheta < c$ . Можно представить и покоящийся фотон. Как у обычной частицы, в этом случае, с изменением скорости будет изменяться энергия, а следовательно и частота по формуле  $E = h\nu$ . Таким образом, ненулевая масса покоя должна естественно приводить к зависимости скорости от частоты, то есть к дисперсии электромагнитных волн в вакууме. Проводимые исследования с учетом точности эксперимента показывают, что, если масса покоя фотона существует, то она  $m_\gamma < (10^{-42} - 10^{-44})z$ . Обнаружение таких масс находится за пределами точности современного эксперимента.

Возможное существование ненулевой массы покоя фотона должно привести к изменению известного закона Кулона, закона взаимодействия неподвижных зарядов, открытого в 1785 году. Изменение должно относиться к изменению зависимости силы взаимодействия от расстояния. Сила – это производная потенциальной энергии взаимодействия по расстоянию:  $F = -\frac{\partial U}{\partial r}$ . Потенциальная энергия взаимодействия зарядов  $U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$ . Отсюда получается зависимость силы  $\sim \frac{1}{r^2}$ . Без учета постоянных величин можно сказать, что закон Кулона соответствует потенциалу электростатического поля  $\varphi \sim \frac{1}{r}$ . Вместо этой зависимости предлагается потенциал Юкавы  $\varphi = \left(\frac{1}{r}\right) \cdot \exp\left(-\frac{r}{\Lambda_\gamma}\right)$ . Этому потенциалу соответствует другая, отличная от известного закона Кулона, зависимость силы взаимодействия зарядов от расстояния.

Взаимодействие зарядов осуществляется обменом фотоном, при испускании которого возникает неопределенность энергии порядка его энергии покоя  $\Delta E \approx m_\gamma c^2$ . Свободный электрон не может испустить фотон, так как это противоречит законам сохранения энергии и импульса. Квантовомеханическое соотношение неопределенностей позволяет такому фотону существовать виртуально в течение короткого времени  $\Delta t \approx \frac{\hbar}{\Delta E} \approx \frac{\hbar}{m_\gamma c^2}$ , после чего он должен быть поглощен другим электроном, или вернуться к электрону. За это время фотон пробежит расстояние порядка  $\Delta t \cdot c \approx \frac{\hbar}{m_\gamma c} = \Lambda_\gamma$ . Здесь  $\Lambda_\gamma$  – комптоновская длина волны, которая в этой формуле имеет смысл радиуса действия электромагнитных сил.

Теории дальнего действия соответствует бесконечно большая скорость распространения агента взаимодействия. Отсюда из последней формулы следует, что масса агента взаимодействия ( $m_\gamma$ ) должна быть равна нулю. Но принятой в настоящее время теории ближнего действия в электромагнитном взаимодействии соответствует конечная скорость  $c$ . Следовательно, вопрос о массе  $m_\gamma$ , входящей в комптоновскую длину является правомерным. На больших расстояниях между зарядами вероятность обмена фотонами резко падает, что и отражено в экспоненциальном множителе потенциала Юкавы. При  $m_\gamma \rightarrow 0$  комптоновская длина волны  $\Lambda_\gamma$  неограниченно растет и получается обычное кулоновское дальнее действие.

Выполненные в различные годы сложные эксперименты, анализ их результатов с учетом достигнутой точности измерения позволил ученым по результатам наиболее точного эксперимента 1971 года сделать вывод о том, что комптоновская длина фотона  $\Lambda_\gamma \lesssim 20 \text{ тыс. км} \approx 2 \cdot 10^9 \text{ см}$ , следовательно,  $m_\gamma c^2 \lesssim 10^{-14} \text{ эВ}$ . Это означает, что, если масса покоя фотона не нулевая, то она  $m_\gamma \lesssim 2 \cdot 10^{-47} z$ .

Экспоненциальный спад интенсивности взаимодействия на расстояниях, больших  $\Lambda_\gamma$ , имеет место не только для электрических, но и для магнитных полей. Э.Шредингер (1943г.) заметил, что комптоновской длине фотонов должно соответствовать расстояние, на которое простирается магнитное поле Земли. В то время это расстояние предполагалось  $\approx 10 \text{ тыс. км}$ . Данные спутников подняли это число до 100 тыс. км. В 1972 году во время полета космической станции «Пионер – 10» проводились измерения магнитного поля Юпитера, область существования которого определена на расстояниях  $\sim 500 \text{ тыс. км}$  от источника. Если это расстояние принять как оценку комптоновской

длины, то есть  $\Lambda_\gamma \lesssim 500 \text{ тыс. км} = 5 \cdot 10^{10} \text{ см}$ . Этому значению соответствует  $m_\gamma c^2 \lesssim 4 \cdot 10^{-16} \text{ эВ}$ . Отсюда следует, что нулевая масса покоя, не может быть больше чем  $7 \cdot 10^{-49} \text{ г}$ . Оценки возможной массы фотона проводились также по результатам измерения протяженности магнитных полей космических объектов. Изучение распространения магнитозвуковых волн в Крабовидной туманности дало для протяженности ее магнитного поля и, следовательно, комптоновской длины фотона величину  $\Lambda_\gamma \gtrsim 3 \cdot 10^{15} \text{ см}$ . Следовательно,  $m_\gamma c^2 \lesssim 6 \cdot 10^{-21} \text{ эВ}$  и  $m_\gamma \lesssim 10^{-53} \text{ г}$ . Было рассмотрено магнитное поле Малого Магелланова облака. Ближайшая к нам галактика Малое Магелланово облако, (расстояние до него  $\approx 55 \text{ кпс} \approx 180 \text{ тыс. световых лет}$ ). Размер области, занятой намагниченным газом, который можно принять за протяженность магнитного поля, оказался порядка диаметра самой галактики  $l \approx 3 \text{ кпс} \approx 10^{22} \text{ см}$ . Отсюда получают  $\Lambda_\gamma \gtrsim 10^{22} \text{ см}$ ,  $m_\gamma c^2 \lesssim 2 \cdot 10^{-27} \text{ эВ}$ ,  $m_\gamma \lesssim 3 \cdot 10^{-60} \text{ г}$ .

Таким образом, попытки оценки возможной массы фотона приводят к уменьшению ее возможной границы. Отмечается, что наблюдение межгалактических магнитных полей позволило бы на два – три порядка улучшить эти оценки. Мы видели, что все эффекты, связанные с предположением  $m_\gamma \neq 0$ , должны проявляться на расстояниях, больших  $\Lambda_\gamma$ . Поэтому, если  $m_\gamma$  настолько мала, что  $\Lambda_\gamma$  превышает видимый радиус Вселенной (примерно 20 млрд. световых лет, или  $2 \cdot 10^{28} \text{ см}$ ), то наблюдаемых следствий обнаружить уже не удастся. Это «граничное» значение дает  $m_\gamma c^2 \approx 10^{-33} \text{ эВ}$ ,  $m_\gamma \approx 2 \cdot 10^{-66} \text{ г}$ .

Обратим внимание на то, что подобное ограничение имеет место при попытках проверки закона сохранения энергии. С точки зрения квантовой механики закон сохранения энергии может быть проверен посредством двух измерений лишь с точностью до величины порядка  $\hbar/\Delta t$ , где  $\Delta t$  – интервал времени между измерениями. Естественно, этот интервал не может быть сделан больше времени существования видимой части Вселенной – 20 млрд. лет, или  $6 \cdot 10^{17} \text{ с}$ . Отсюда следует, что минимально возможная неопределенность при измерениях энергии составляет как раз  $10^{-33} \text{ эВ}$ . С другой стороны, соотношение неопределенностей означает, что энергии, величины которых меньше, чем  $\Delta E$ , определяемые соотношением неопределенностей, принципиально не наблюдаемы, так же как принципиально не наблюдаемой может быть масса покоя фотона, если она  $\leq 10^{-66} \text{ г}$ . Для поисков фотонной массы остался интервал между  $10^{-60}$  и  $10^{-66} \text{ г}$ . Возможная ненулевая величина массы покоя фотона, если она будет обнаружена, должна внести изменения в физическую науку, следовательно, в физическую картину мира. Но ее очень малая величина может проявиться только на очень тонких эффектах, в больших пространственных и временных масштабах.

## 1.9 Генерация электромагнитных волн

**Электромагнитные волны. Классификация по длинам волн и частоте.** Электрические и магнитные явления, электромагнетизм играют большую роль в производственной деятельности человека, в быту. Они являются важной составляющей физической картины мира. Электромагнитные волны являются важным источником информации о процессах, протекающих во Вселенной. Эту информацию получают на основе знания и понимания механизмов генерации волн различных диапазонов, истории их открытия. Поэтому электромагнитным волнам, механизмам их генерации, роли в исследовании процессов, протекающих в различных физических системах, практической значимости отводится значительное место в содержании обучения физике и астрономии в школе и в вузе. Углубленное изучение этих вопросов необходимо студентам бакалавриата – будущим учителям и магистрантам.

Электромагнитные явления – это широкий круг явлений и процессов, являющихся следствием существования электрических зарядов, их движения и взаимодействия. Всю совокупность таких явлений можно представить в виде нескольких составляющих, каждая из которых объединяет некоторую группу электромагнитных процессов, явлений. Одну из таких составляющих представляют **электромагнитные волны**. О существовании электромагнитных волн в настоящее время знает каждый. На различных диапазонах длин волн работают рентгеновские установки, передается радио- и телевизионная информация, осуществляется радиолокация земных и космических объектов. Всем известно двойственное положительное и отрицательное влияние на живые организмы ультрафиолетового, инфракрасного, рентгеновского и  $\gamma$  – излучения. Видимый свет – это также электромагнитные волны определенного диапазона. Отражением значимости

электромагнитных волн является включение в содержание обучения физике и астрономии вопросов, связанных с их природой, механизмом излучения, процессами распространения. К Земле из космического пространства приходят электромагнитные волны всего диапазона. Регистрация и исследование их позволяют судить о процессах в космическом пространстве. Астрономия – одна из самых древнейших наук. Начало ее развития связано с использованием только оптического диапазона электромагнитных волн. Единственной информацией из космоса долгое время был свет, излучаемый звездами и отраженный или рассеянный различными космическими объектами. В настоящее время астрономия является всеволновой. **Всеволновая астрономия – раздел астрофизики, изучающий космические объекты методом исследования электромагнитного излучения.** Важная роль в исследовании космического пространства каждого диапазона электромагнитных волн привела к тому, что в астрономии в самостоятельную отрасль науки выделились гамма – астрономия, рентгеновская астрономия, инфракрасная астрономия и радиоастрономия.

**Электромагнитные волны** представляют собой электромагнитные колебания, распространяющиеся в пространстве с конечной скоростью. Их существование было предсказано в 1832 году английским физиком М. Фарадеем. Используя известные экспериментальные законы электричества и магнетизма и математический аппарат дифференциального исчисления, Дж. Максвелл в 1865 году пришел к принципиально новым для физической науки положениям о существовании электромагнитных волн и механизме их излучения: распространение в пространстве изменяющихся электрического и магнитного полей, образующих единое электромагнитное поле, описывается волновыми уравнениями, следовательно, представляет собой волновой процесс. А.Эйнштейн сравнивает имена М.Фарадея и Дж.Максвелла в науке об электричестве с именами Г.Галилея и И.Ньютона в механике. Здесь действительно прослеживается аналогия. И.Ньютон завершил механику, начало которой положил Г.Галилей. М.Фарадей по-новому подошел к изучению электрических и магнитных явлений, обратив внимание на роль среды. Он ввел концепцию поля, описываемого им с помощью силовых линий. Дж.Максвелл идеям М.Фарадея придал математическую завершенность, ввел точный термин «электромагнитное поле», которого еще не было у М.Фарадея. Так же как Г.Галилей и И.Ньютон заложили основы механической картины мира, М.Фарадей и Дж.Максвелл заложили основу электромагнитной картины мира.

Теория Дж.Максвелла получила решающее подтверждение в опытах немецкого физика Г.Герца в 1888 г. По теории Дж.Максвелла переменное поле всегда является электромагнитным. Изменения электрического и магнитного полей, происходящие в некоторой области, распространяются в пространстве в виде электромагнитных волн. Основными характеристиками волны является частота и длина волны, которые у электромагнитных волн охватывают весь интервал от нуля до бесконечности в зависимости от частоты колебаний в источнике. Этот интервал, разделенный на отдельные диапазоны называют шкалой электромагнитных волн. В ней представлены в порядке уменьшения частоты (увеличения длины волны) гамма излучение, рентгеновское излучение, ультрафиолетовое, видимый свет, инфракрасное излучение, радиоволны, низкочастотное излучение (рисунок 1.2).

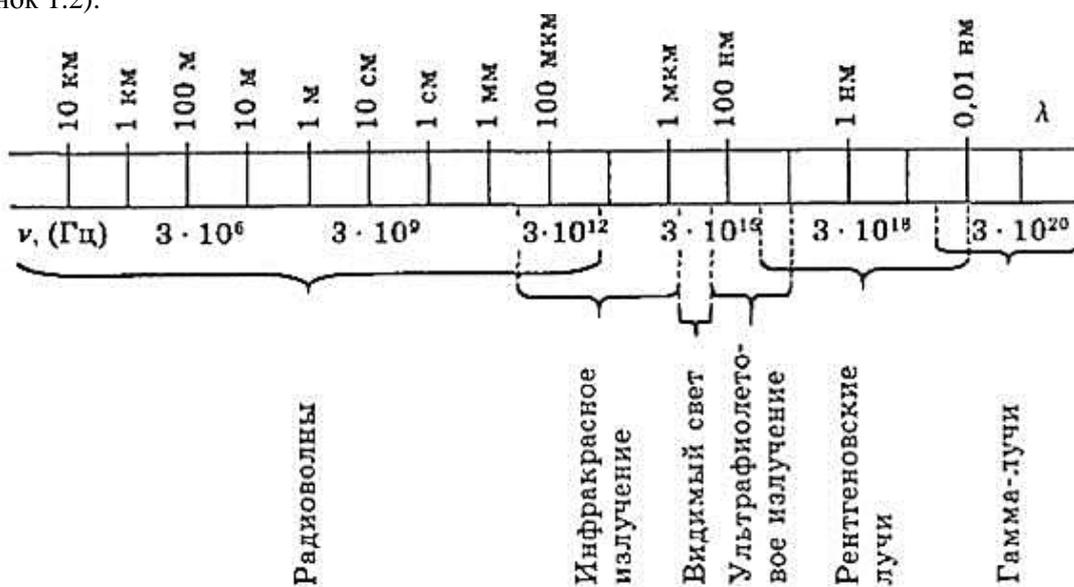


Рисунок 1.2 Шкала электромагнитных волн

Изучение шкалы электромагнитных волн входит в содержание изучения физики в школе и в ВУЗе. В таблице 1 представлены принятые диапазоны, с указанием частоты и длины волны, относящихся приблизительно к центру диапазона.

Обратим внимание на то, что в приведенной таблице по источнику 1983 года космические процессы как источники электромагнитных волн указаны только для гамма-излучения. Если в настоящее время радиоастрономия, рентгеновская астрономия выделены в отдельные направления науки, то это означает, что космические процессы, как источники электромагнитных волн играют значительную роль для всего диапазона волн.

Таблица 1. Диапазоны электромагнитных волн

Частота $\nu$ , Гц	Длина волны $\lambda$ , м	Название диапазона	Источники. Основные методы возбуждения
$10^3$	$3 \cdot 10^8$	Радиоволны	Переменные токи в проводниках и электронных потоках (генераторы радиочастот, генераторы СВЧ)
$10^{12}$	$30 \cdot 10^{-4}$	ИК-излучение Видимый свет	Излучение молекул и атомов при тепловых и электрических воздействиях
$3,75 \cdot 10^{14}$	$8 \cdot 10^{-7}$		
$7,5 \cdot 10^{14}$	$4 \cdot 10^{-7}$	УФ излучение, мягкий рентген	Излучение атомов при воздействиях ускоренных электронов
$3 \cdot 10^{17}$	$10^{-9}$	Рентген, $\gamma$ -излучение	Атомные процессы при воздействии ускоренных заряженных частиц
$3 \cdot 10^{20}$	$10^{-12}$	$\gamma$ -излучение	Ядерные процессы, радиоактивный распад, космические процессы
$10^{23}$	$3 \cdot 10^{-15}$		

Электромагнитные волны различной частоты (длины) имеют одинаковую природу – распространяющееся в пространстве переменное электромагнитное поле. На шкале электромагнитных волн только видимый диапазон отмечается четкими границами, так как он определен свойствами среднего человеческого глаза. Однако между остальными диапазонами четкой границы нет. Это связано с тем, что названия диапазонов электромагнитных волн отражают историю их открытия, источник и метод получения. И в зависимости от метода получения, волне в данном исследовании будет присвоено соответствующее название. Например, излучение будет называться  $\gamma$  – излучением, если его источником явился радиоактивный распад, или рентгеновским при такой же длине волны, если оно получено в результате перехода электронов между нижними энергетическими уровнями тяжелых элементов. Поэтому представляет интерес изучение не только механизмов излучения электромагнитных волн, их применения, но и история их открытия, которая у каждого диапазона своя.

Из теории Дж. Максвелла, как отмечалось выше, следовало, что переменное электромагнитное поле распространяется в виде волн. Вычисленная теоретически скорость электромагнитных волн совпала с известной к тому времени скоростью света ( $3 \cdot 10^8$  м/с). Этот результат имел важное значение в истории физики, в частности, в решении известной проблемы света. Он позволил Дж. Максвеллу выдвинуть гипотезу об электромагнитной природе света, которая в последствии подтвердилась: свет – электромагнитные волны определенного диапазона. Русский ученый А.С. Попов в опытах Г.Герца видел не только доказательство существования электромагнитных волн и вытекающей отсюда природы света. Он считал, что они представляют большой интерес не только в научном смысле, но и практическом. А.С. Попов и Г.Маркони реализовали идеи о практическом применении электромагнитных волн в беспроводной связи, используя диапазон электромагнитных волн, называемый в настоящее время радиодиапазоном.

История открытия **инфракрасного излучения** связана с исследованием излучения Солнца английским астрономом У.Гершелем в 1800 году. В поисках способа уменьшения нагрева инструмента, с помощью которого велись наблюдения, У.Гершель обнаружил существование излучения за красной границей видимого спектра [8]. **Ультрафиолетовое излучение** принято делить

на ближнее и вакуумное. Ближнее ультрафиолетовое излучение открыто в 1801 году немецким ученым И.В. Ритгером и английским ученым У. Волластоном. Ими обнаружено невидимое глазом излучение за фиолетовым краем спектра, которое действовало на некоторые химические соединения, например, разложение хлорида серебра, свечение кристаллов сульфида цинка и другие. Вакуумное ультрафиолетовое излучение (до 130 нм.) открыто немецким ученым В. Шуманом 1885-1903 году, до 25 нм. – английским физиком Т. Лаймоном 1924 году. Это излучение поглощается в атмосфере, наблюдать его можно только из космоса, поэтому его называют вакуумным ультрафиолетом. История открытия рентгеновского диапазона электромагнитных волн, лежащего между ультрафиолетом и гамма излучением, достаточно подробно излагается в различных учебных пособиях. Излучение этого диапазона было открыто немецким физиком В.К. Рентгеном, имя которого и было присвоено данному диапазону. Электронно-лучевая трубка, с помощью которой было получено излучение, получила название рентгеновской. Обнаружение  $\gamma$  – диапазона электромагнитных волн связано с открытием естественной радиоактивности. История этого открытия так же подробно изложена в соответствующих учебных пособиях [3].

Далее рассматриваются источники излучения электромагнитных волн и механизмы их излучения, условия и процессы, приводящие к излучению, которые для волн различных диапазонов могут быть различными. Поэтому исследование электромагнитных волн, приходящих из Космоса, позволяет ученым делать некоторые выводы о состоянии космического пространства и процессах, в нем протекающих.

**Тепловые источники излучения. Реликтовое излучение во Вселенной.** Выше рассмотрена классификация (шкала) электромагнитных волн по диапазонам длин волн. В физической науке используется также классификация волн по источникам их излучения. В общем случае источники можно разделить на две группы, к которым относят тепловые и нетепловые. Тепловым или температурным излучением называют излучение, находящееся в равновесии с нагретым телом. Оно является следствием хаотического теплового движения частиц тела, их кинетической энергии и, следовательно, зависит от температуры. При столкновении частиц за счет их кинетической энергии может происходить переход электронов атомов или молекул на более высокие энергетические уровни. Эти возбужденные уровни нестабильны. При возвращении электронов на нижние свободные уровни наблюдается излучение соответствующей частоты или длины волны. Равновесное тепловое излучение достаточно хорошо изучено в физике. Спектр этого излучения называется планковским. Название обусловлено тем, что М. Планк теоретически объяснил экспериментальную кривую распределения энергии в спектре излучения черного тела, введя при этом представление о квантовом (дискретном) характере излучения, что дало начало современной квантовой физике.

Нетепловые источники излучения связаны с движением заряженных частиц в электрических и магнитных полях. К таким источникам можно отнести также излучение, образующееся в результате **мазерного эффекта**. При использовании электромагнитного излучения в научных исследованиях, при определении механизма, регистрируемого излучения принципиальное значение имеет то, что спектры теплового и нетеплового излучения различны. У теплового излучения спектр планковский и определяется температурой источника. Спектры нетеплового излучения нельзя характеризовать каким-либо значением температуры источника. Поэтому характер спектра несет *информацию о процессах, протекающих в источнике*.

В астрономии источником теплового излучения являются звезды. Вследствие их высокой температуры максимум плотности энергии излучения приходится на область видимого диапазона электромагнитных волн. Особый интерес представляет также электромагнитное микроволновое фоновое излучение, происхождение которого связывают с началом рождения Вселенной и ее дальнейшим расширением после Большого Взрыва. С этим связано второе название данного излучения – **реликтовое**. Реликтовое излучение было открыто в 1965 году американскими астрономами А.Пензиасом и Р.Вильсоном. Фоновое реликтовое радиоизлучение важно для космологии, во-первых, как факт самого его существования и, во-вторых, потому, что оно дает возможность исследовать физические процессы во Вселенной и ее структуру. Электромагнитное излучение испускается различными астрономическими источниками. Одной из особенностей реликтового излучения, отличающих его от излучения других космических источников является то, что оно обладает угловой (пространственной) изотропией, то есть его интенсивность, регистрируемая на Земле, одинакова от всех участков неба. Спектр данного излучения имеет планковскую форму, то есть форму излучения черного тела, находящегося с этим телом в равновесии. Характер спектра соответствует температуре примерно **3К**. Плотность равновесного реликтового излучения составляет  $5 \cdot 10^{-13} \text{ эрг/см}^3$ . Первоначальное излучение соответствовало закону Планка при высокой температуре.

При расширении Вселенной температура понижается, но закон Планка остается. При расширении область, занимаемая излучением, увеличивается  $\sim R^3$ .

Согласно современным космологическим представлениям в модели горячей Вселенной в прошлом вещество имело очень высокую температуру. При  $T > 10^8 \text{K}$  первичная плазма из протонов, ионов гелия и электронов, непрерывно излучающих, рассеивающих и поглощающих фотоны, находилась в полном термодинамическом равновесии с излучением. На ранних стадиях в период  $t \sim 100 \text{c}$  после начала расширения Вселенной в эпоху высоких температур не существовало нейтральных атомов и молекул, так как энергия фотонов и теплового движения частиц превышала энергию связи атомов и молекул. Высокие плотность и температура излучения не позволяли образовываться нейтральным атомам, так как высокоэнергичные фотоны ионизировали вещество. Поэтому вещество находилось в состоянии плазмы в равновесии с излучением. Равновесный (планковский) спектр сформировался благодаря взаимодействию излучения с равновесной плазмой. При последующем расширении Вселенной температура плазмы и излучения падала, но чернотельный (планковский) спектр излучения сохраняется, уменьшается лишь его температура. Фотоны реликтового излучения распространяются практически свободно и наблюдаются сейчас в виде равновесного микроволнового фонового излучения. Длина их свободного пробега огромна, составляет миллиарды световых лет от акта их последнего рассеяния. Такая большая длина свободного пробега используется как эффективное средство исследования крупномасштабной структуры Вселенной.

Спектр реликтового излучения хорошо изучен в диапазоне от 3 мм до 21 см. В этом диапазоне излучение изотропно с точностью до десятой доли процента. В длинноволновом участке инфракрасной области (субмиллиметровый диапазон) содержится основная часть энергии реликтового излучения, возникшего на ранней стадии расширения Вселенной. В больших угловых масштабах обнаружена слабая анизотропия на уровне  $\Delta T/T \approx 10^{-3}$ , что означает некоторое различие в температуре излучения с разных участков неба. Различие температур в науке интерпретируется как результат движения солнечной системы относительно фона реликтового излучения со скоростью около 420 км/с. Температура излучения, идущего из области на небесной сфере в направлении которой движется Солнце, несколько выше чем из диаметрально противоположного участка неба. Обнаружено также годовые вариации температуры, связанные с движением Земли вокруг Солнца.

В 1965 году обнаружено реликтовое радиоизлучение или микроволновое фоновое излучение. Это излучение обнаружили сначала на волне 7,35 см, а затем и на других волнах от 0,6 мм до 50 см. Реликтовое излучение относится к диапазонам сантиметровых, миллиметровых и субмиллиметровых волн. Средняя энергия этих фотонов мала (в 3000 раз меньше энергии фотонов видимого света). Но число фотонов очень велико, на каждый атом во Вселенной приходится  $10^9$  фотонов микроволнового фонового излучения (400-500 фотонов в  $\text{см}^3$ ).

Реликтовое излучение несет информацию не только о раннем периоде эволюции мира, но и о некоторых более поздних процессах, протекающих во Вселенной. Некоторые из этих процессов касаются частиц космических лучей очень высокой энергии. Таких частиц мало. Оказалось, что время жизни таких частиц зависит от фотонов реликтового излучения. При столкновении с ними ультрарелятивистских электронов космических лучей происходит перераспределение энергии и импульса. Энергия фотона во много раз возрастает, радиифотон превращается в рентгеновский фотон. Энергия электрона в одном акте взаимодействия мало меняется, но процесс повторяется многократно. Электрон постепенно теряет всю энергию, а наблюдаемое со спутников и ракет рентгеновское фоновое излучение по-видимому частично обязано своим происхождением этому процессу. Протоны и ядра сверхвысоких энергий также подвержены воздействию микроволнового фонового излучения. При взаимодействии их энергия уменьшается. С этими процессами связывают практическое отсутствие в космических лучах частиц с энергией больше  $10^{20}$  эВ, а также малое количество тяжелых ядер.

Таким образом, имеющаяся информация о свойствах микроволнового фонового излучения, его спектре, не похожем на спектр радиоисточников, очень высокая энергия, почти полное отсутствие флуктуаций, изотропия не позволяют считать его источником звезды, радиогалактики, горячий межгалактический газ, переизлучение видимого света межзвездной пылью.

## 1.10 Классификация механизмов излучения. Классические механизмы излучения электромагнитных волн

Источники электромагнитных волн по своей природе и механизму излучения могут быть различными. Выше отмечено деление источников на тепловые и нетепловые. В соответствие с тем, что содержание физической науки принято делить на физику классическую и физику современную (квантовую), механизмы излучения электромагнитных волн также можно классифицировать как классические и квантовые: схема 1. Механизмы излучения ЭМВ.



Схема 1. Механизмы излучения ЭМВ

Классический механизм излучения предсказан в фундаментальной теоретической электродинамике, разработанной Дж.Максвеллом в третьей четверти 19 века. Согласно Дж.Максвеллу источником электромагнитных волн могут быть заряды, движущиеся с переменной скоростью, то есть с ускорением. Мощность излучения пропорциональна квадрату ускорения. Следовательно, для возникновения излучения не имеет значения изменяется ли скорость по направлению или по модулю, возрастает она или уменьшается. Такие изменения скорости (ускорения) заряда могут возникать при его движении в электрических полях под действием силы Кулона и в магнитных – под действием силы Лоренца, которая искривляет траекторию, не изменяя скорости по модулю. Механизмы излучения, связанные с ускоренным движением частиц в электрических и магнитных полях, относятся к нетепловым. В зависимости от природы ускорения заряженных частиц излучение может иметь определенное название.

**Тормозное излучение** – электромагнитное излучение, испускаемое заряженной частицей при ее рассеянии (торможении) в электрическом поле. Классическая электродинамика с хорошим приближением описывает тормозное излучение. Так как ускорение, согласно второму закону Ньютона, обратно пропорционально массе частицы, а в формулу мощности излучения ускорение входит в квадрате, то в одном и том же поле излучение легкой частицы, например, электрона будет в миллион раз больше, чем протона. Поэтому на практике используется тормозное излучение электронов на электростатическом поле атомных ядер и электронов. Такова природа тормозного **рентгеновского** и  **$\gamma$  - излучения**, испускаемых быстрыми электронами при прохождении их через вещество. Тормозное излучение из Космоса также в основном электронного происхождения. Спектр фотонов тормозного излучения непрерывен и обрывается сверху максимально возможной энергией равной начальной энергии электрона. Наиболее точное описание тормозного излучения дает квантовая электродинамика. Причиной значительного тормозного излучения может быть тепловое движение в горячей разряженной плазме (с температурой  $10^5$  -  $10^6$  K и выше). Элементы тормозного излучения, называемого в этом случае тепловым, обусловлены столкновениями заряженных частиц, из которых состоит плазма. Космическое рентгеновское излучение, наблюдение которого стало возможным с появлением искусственных спутников Земли, частично (а излучение некоторых дискретных рентгеновских источников, возможно, полностью) является, по-видимому, тепловым тормозным излучением.

**Магнитотормозное излучение** – это излучение заряженных частиц, вращающихся вокруг силовых линий магнитного поля под действием силы Лоренца. В случае нерелятивистских частиц называется циклотронным, релятивистских частиц – синхротронным. Магнитотормозное излучение играет важную роль в радиоизлучении галактик, радио-, оптическом и рентгеновском излучении остатков вспышек сверхновых звезд, в оптическом излучении магнитных белых карликов,

рентгеновском излучении аккрецирующих нейтронных звезд (рентгеновские пульсары), в радиоизлучении Солнца, больших планет и других космических объектов.

Рассмотрим **циклотронное** излучение, то есть излучение нерелятивистских частиц, движущихся в магнитном поле. Такие частицы описывают спиральные траектории, как бы навиваясь на линии магнитного поля. Угловая скорость вращения таких частиц называется **циклотронной частотой**  $\omega_B = \frac{qB}{mc}$ , где  $q$  - заряд частицы и  $m$  - ее масса. Так как частица движется с ускорением, то заряды излучают как на основной частоте, так и на более высоких гармониках  $\omega = S \cdot \omega_B$ . Полная мощность излучения

$$P = \frac{2q^4 B^2 v_{\perp}^2}{3m^2 c^5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{q^2}{c^3} \omega_B^2 v_{\perp}^2$$

где  $v_{\perp}^2$  - компонент скорости частицы, перпендикулярный магнитному полю. Мощность излучения на гармониках меньше, чем на основной частоте. С увеличением номера гармоники интенсивность излучения очень быстро падает. В то же время растет его направленность. Излучение сосредоточено в плоскости орбиты частицы.

В космических условиях магнитные поля обычно не очень сильные, поэтому **циклотронная частота** невелика. Эта частота и ее гармоники оказываются меньше **плазменной частоты**. Поэтому **циклотронное излучение** в плазме распространяться не может. В некоторых случаях, например, в корональной плазме над солнечными пятнами **циклотронное излучение** может быть существенным. **Циклотронный механизм** объясняет особенности медленно изменяющегося компонента радиоизлучения Солнца. **Циклотронное излучение** может играть заметную роль в радиоизлучении магнитосфер планет. Сильные магнитные поля обнаружены на поверхности белых карликов ( $B \sim 10^5 - 10^8$  Гс) и нейтронных звезд ( $B \sim 10^9 - 10^{13}$  Гс). При аккреции плазмы на эти объекты **циклотронное излучение** становится важнейшим механизмом излучения не только на основной, но и на высоких гармониках. **Циклотронное излучение** у этих объектов попадает в инфракрасный, оптический, ультрафиолетовый и рентгеновский диапазоны. Наблюдение **циклотронного излучения** позволяет делать вывод о величине магнитного поля и состоянии среды в области, из которой приходит излучение.

**Синхротронное излучение** – это излучение заряженными частицами, движущимися с релятивистскими скоростями в **однородном магнитном поле**. Его называют также **магнитотормозным**. Впервые **синхротронное излучение** предсказано Э. Шоттом в 1913 году и наблюдалось в циклических ускорителях синхротронах, поэтому и получило такое название. Так же, как и **циклотронное** оно обусловлено ускорением, связанным с искривлением траектории частиц в магнитном поле, то есть с движением частицы по круговым или спиральным траекториям. Излучение заряженных релятивистских частиц обладает рядом существенных отличий от излучения медленных частиц. При движении заряда в магнитном поле излучение происходит на основной гиромангнитной частоте и ее первых гармониках. С увеличением скорости частицы роль высоких гармоник возрастает. При приближении к релятивистскому пределу излучение в области наиболее интенсивных высоких гармоник обладает практически непрерывным спектром и сосредоточено в направлении мгновенной скорости в узком конусе с углом раствора  $\Psi \sim \frac{mc^2}{E}$ , где  $m$  и  $E$  – масса и энергия частицы. Полная мощность излучения при  $E \gg mc^2$  сильно зависит от массы излучающей частицы (обратно пропорционально квадрату массы). Поэтому **синхротронное излучение** наиболее существенно для легких частиц – электронов и позитронов.

Большой интерес представляет **синхротронное излучение** космических объектов. Оно образует нетепловой **радиофон Галактики, нетепловое радио и оптическое излучение дискретных источников (сверхновые звезды, пульсары, квазары, радиогалактики)**. **Синхротронная природа** этих излучений подтверждается особенностями их спектра и поляризации. **Согласно современным представлениям релятивистские электроны, входящие в состав космических лучей, в космических магнитных полях дают излучение в радио, оптическом и, возможно, рентгеновском диапазонах.** *Измерения синхротронного излучения позволяют получать информацию о концентрации и энергетическом спектре релятивистских электронов, величине и направлении магнитных полей, удаленных в частях Вселенной.*

В схеме 2 «Классический механизм излучения» представлены рассмотренные частные случаи этого механизма излучения.



Схема 2. Классический механизм излучения

**Квантовые механизмы излучения. Мазерный эффект.** Одним из наиболее известных квантовых механизмов излучения является механизм, связанный с переходами электрона между дискретными энергетическими уровнями атома. Спектр такого излучения также дискретный. Энергия излучаемого кванта (фотона) определяется разностью энергий энергетических уровней перехода. Этот механизм излучения рассматривается при изучении физики в школе и в ВУЗе. Квантовый механизм излучения обеспечивает, в частности, и тепловое излучение. Квантовыми источниками излучения являются также квантовые усилители и генераторы (лазеры и мазеры). Их специфика в создании условий для инверсной заселенности электронами энергетических уровней, переходы с которых на нижерасположенные уровни дают мощное излучение. К квантовым источникам излучения относится и обратный Комптон эффект.

**Мазерный эффект** представляет собой специфический механизм электромагнитного излучения, приходящего из Космоса. Мазерный эффект в Космосе – это усиление интенсивности радиоизлучения, проходящего через космическую среду, за счет индуцированного испускания резонансных фотонов возбужденными молекулами среды. Для мазерного эффекта необходима инверсная заселенность энергетических уровней. Это означает, что число молекул среды, находящихся на верхнем резонансном уровне энергии больше числа молекул, находящихся на нижнем уровне. Вследствие инверсной заселенности уровней индуцированное испускание фотонов будет преобладать над их поглощением. Вследствие этого проходящее сквозь среду излучение будет усиливаться. Для создания инверсной населенности необходима непрерывная энергетическая накачка молекул, переводящая электроны с нижнего на верхний энергетический уровень. Индуцированное излучение характеризуется тем же направлением распространения, той же частотой и поляризацией, что и исходное индуцированное излучение. Это характерные особенности мазерного излучения, которые отличают его от спонтанного, то есть самопроизвольного излучения. Космические мазеры были открыты в 1965 году (Х.Уивер и другие, США). Учеными были обнаружены очень интенсивные линии с длиной волны 18 см. в спектрах радиоизлучения некоторых источников (туманность Ориона). Исследования показали, что эти линии не поражаются каким-либо специальным источником, а их высокая интенсивность обусловлена мазерным механизмом на межзвездном гидроксиле  $OH$ . В 1969 году были открыты еще более мощные источники мазерного излучения на длине волны 1,35 см. Такой мазер работает на молекулах водяного пара  $H_2O$ . Позднее были открыты и другие мазерные источники на других молекулах.

**Обратный Комптон эффект.** Комптон эффект – упругое рассеяние электромагнитного излучения на свободных или слабосвязанных электронах, сопровождающееся увеличением длины волны, уменьшением частоты, в результате передачи части энергии фотона электрону. Наблюдается при рассеянии высокоэнергичных фотонов рентгеновского и гамма излучения. Эффект был открыт в

1922 году американским физиком А.Комптоном при исследовании рассеяния рентгеновских лучей в парафине. Этот эффект входит в содержание обучения физике как подтверждение корпускулярных свойств электромагнитного излучения.

Возможно обратное явление. Если рассеяние фотонов происходит на релятивистских электронах, то происходит обратная передача энергии от электрона к фотону. В результате этого процесса энергия и импульс фотонов увеличиваются, то есть увеличивается частота электромагнитного излучения, уменьшается длина волны. Это явление – обратный Комптон эффект. Его часто привлекают для объяснения механизма рентгеновского излучения космических источников, образования рентгеновской компоненты фонового галактического излучения и трансформации плазменных волн в электромагнитные волны высокой частоты [8].

Область астрономических исследований обширна. Поэтому ее развитие сопровождалось выделением отдельных направлений в самостоятельные области науки. Из астрономии в самостоятельную науку выделилась астрофизика. Понимание связи изучаемого диапазона электромагнитных волн с особенностями физических процессов в источнике, совершенствование техники регистрации и выход за пределы атмосферы привело к тому, что астрономия стала всеволновой. При этом следствием значимости различных диапазонов электромагнитных волн, несущих информацию о процессах, протекающих в космическом пространстве, сопровождалось формированием гамма-астрономии, рентгеновской астрономии, ультрафиолетовой астрономии, инфракрасной астрономии, радиоастрономии как самостоятельных направлений науки астрономии.

Тема электромагнитных волн очень обширна, все многообразие вопросов, которые она включает, трудно охватить за время, отведенное учебным процессам, но теоретическая и практическая значимость темы требует более углубленного ее изучения. Это может быть реализовано через систему индивидуальных заданий и проектной деятельности в рамках самостоятельной работы обучающихся (СРО), которой при современной кредитной системе обучения отводится значительное место. Как правило, обучаемые проявляют интерес к электромагнитным волнам, нашедшим широкое применение в жизни современного человека, и к возможности получения информации о процессах в космическом пространстве через понимание механизмов их генерации. Разработанные в данном параграфе материалы опубликованы в [9].

### 1.11 Всеволновая астрономия

Астрономия – одна из древнейших и интереснейших наук о Вселенной. В течение нескольких веков ученым была доступна информация из Космоса только на основе видимого света. Развитие теоретической электродинамики Дж.Максвелла, показавшей существование электромагнитных волн, как распространяющегося в пространстве переменного электромагнитного поля, изучение механизмов излучения и регистрации волн различного диапазона позволило обнаружить, что из космического пространства к Земле приходят электромагнитные волны всего диапазона. Их регистрация, исследование и анализ составляют значительную часть астрономических наблюдений и позволяют судить о процессах, происходящих в космическом пространстве. В предыдущем параграфе рассмотрены механизмы генерации электромагнитных волн различного диапазона, которые могут иметь место и в Космосе. Если астрономические исследования долгое время проводились с использованием единственной информацией из Космоса, которой был видимый свет, испускаемый звездами, или рассеянный другими космическими объектами, то в настоящее время астрономия стала всеволновой. В наземных обсерваториях, на больших высотах от поверхности Земли и в Дальнем Космосе наблюдения и регистрация излучения ведутся во всем диапазоне электромагнитных волн. Возникло и развивается новое направление науки - **всеговолновая астрономия. Она представляет собой раздел астрофизики, изучающий космические объекты методом исследования электромагнитного излучения.** Важная роль каждого диапазона электромагнитных волн в исследовании космического пространства привела к тому, что во всеволновой астрономии в самостоятельную отрасль науки выделились гамма – астрономия, рентгеновская астрономия, инфракрасная астрономия и радиоастрономия.



Схема 3. Всеволоновая астрономия

Переходя к всеволоновой астрономии, обратим внимание на виды спектров электромагнитных волн, излучаемых различными источниками (схема 4).

Все виды спектров достаточно хорошо изучены. Рассмотрим спектры на основе материала, изложенного в работах. Спектры, как известно, бывают линейчатые, полосатые и сплошные в зависимости от условий излучения. Исследования спектров позволяют получать информацию о характеристиках излучающей системы.



Схема 4. Виды спектров

**Линейчатый спектр.** Линейчатый спектр состоит из отдельных спектральных линий, которые соответствуют определенным длинам волн. Линейчатыми являются спектры излучения изолированных атомов или их ионов. В реальных условиях это могут быть спектры излучения одноатомного (или ионного) разреженного газа, в котором частицы находятся на большом расстоянии друг от друга, так что их взаимодействием можно пренебречь. Такие условия могут существовать в космическом пространстве. Линейчатые спектры обусловлены переходами

электронов между дискретными энергетическими уровнями атома или иона, которые у каждого вида частиц свои. Поэтому такие спектры являются характеристическими. Наблюдения их позволяют делать вывод о наличии соответствующих атомов или их ионов и степени ионизации. Линейчатый спектр возникает также после ионизации атома с выбрасыванием электрона с одной из его внутренних оболочек при столкновениях атома с быстро заряженной частицей (первичное рентгеновское излучение), или при поглощении атомом кванта электромагнитного излучения (флуоресцентное рентгеновское излучение). Линейчатый спектр испускают газы, пары малой плотности в атомарном состоянии.

**Полосатый спектр.** Полосатый спектр состоит из отдельных полос, разделенных темными промежутками. Полосатые спектры также являются характеристическими, каждая полоса в спектре состоит из близкорасположенных линий. Такие спектры характерны для излучения молекул. Причина их возникновения в том, что в их спектрах на основные дискретные энергетические уровни, обусловленные взаимодействием электрона с ядром, накладываются спектры колебательного и вращательного движения атомов в молекуле, которые также дискретны. Энергетический уровень превращается в полосу, состоящую из близкорасположенных уровней. Полная энергия может быть представлена  $E = E_{эл} + E_{кол} + E_{вращ}$ , причем  $E_{эл} \gg E_{кол} \gg E_{вращ}$ . В астрономии линейчатые и полосатые спектры используются в исследованиях химического состава космических объектов.

**Сплошной спектр.** Сплошной спектр содержит все длины волн определенного диапазона. Сплошные спектры характерны для теплового излучения и нетеплового тормозного излучения. Например, непрерывный (тормозной) спектр испускают быстрые заряженные частицы в результате торможения при взаимодействии с атомами мишени. При аннигиляции электрона и позитрона образуется либо два фотона, с энергией  $0,511 \text{ МэВ}$ , либо три фотона с непрерывным частотным спектром. Сплошной спектр дают нагретые тела в твердом и жидком состоянии, сильно сжатые газы, высокотемпературная плазма.

Отметим еще раз, что все виды спектров используются в астрономических исследованиях. Механизмы излучения, свойства ЭМВ различных диапазонов изучаются в наземных лабораториях. Полученная информация используется при анализе ЭМВ космического происхождения. Далее рассмотрим разделы всеволновой астрономии и соответствующие особенности свойств различных диапазонов излучения. Особенности различных направлений всеволновой астрономии, использующих различные диапазоны электромагнитных волн, являются следствием особенностей волн соответствующего диапазона, их генерации и распространения. Будем рассматривать разделы всеволновой астрономии в порядке увеличения диапазона используемых длин волн (уменьшение частот) от гаммы – излучения до радиоволн.

**Гамма-астрономия. Гамма-излучение.** Гамма-излучение – это самое коротковолновое электромагнитное излучение. Диапазон длин волн меньше чем  $10^{-8} \text{ см.}$ ,  $10^{-10} \text{ м.}$  У волн такой малой длины (высокой частоты) ярко выражены корпускулярные свойства – большая энергия фотона  $h\nu$  и большой импульс  $\frac{h\nu}{c}$ . Известно, что гамма – излучение возникает при радиоактивном распаде в тех случаях, когда образующиеся ядра, продукты распада, находятся в возбужденном состоянии. При переходе ядра из возбужденного состояния в состояние с меньшей энергией излучается фотоны высокой энергии: от  $10 \text{ кэВ}$  до  $5 \text{ МэВ}$ . Следствием дискретного энергетического спектра ядра дискретным является спектр излучения. Гамма-кванты высоких энергий возникают также при распадах элементарных частиц. Например, при распаде покоящегося нейтрального  $\pi$ -мезона возникает гамма-излучение с энергией  $\sim 70 \text{ МэВ}$ . Гамма-излучение может возникать при прохождении быстрых электронов через вещество. Его возникновение обусловлено торможением электронов в кулоновском поле ядер атомов вещества. Тормозное гамма-излучение характеризуется сплошным спектром. Верхняя граница спектра совпадает с энергией заряженных частиц. На ускорителях заряженных частиц получают гамма-излучение с энергией до нескольких десятков ГэВ. Это тоже тормозное излучение. Гамма-излучение обладает большой проникающей способностью. При взаимодействии его с веществом наблюдаются фотоэффект, Комптон - эффект и рождение пары электрон-позитрон. Рождение пары возможно, если энергия кванта больше  $2mc^2 = 1,02 \text{ МэВ}$ .

Процессы генерации космического гамма-излучения делят на три группы. **К первой группе** относят генерацию гамма-излучения при взаимодействиях электронов высоких энергий с заряженными частицами (тормозное излучение, синхротронное излучение, обратный Комптон эффект). **Ко второй группе** относят ядерные процессы. Ядерные реакции зачастую сопровождаются образованием возбужденных ядер. При переходе ядер в основное состояние, излучаются фотоны с энергиями гамма-диапазона. Среди ядерных спектральных  $\gamma$  – линий особый интерес представляет

линия с энергией  $2,23\text{МэВ}$ , связанная с образованием дейтрона при захвате нейтрона протоном; регистрация  $\gamma$ -фотонов с энергией  $2,23\text{МэВ}$  позволяет оценивать потоки свободных нейтронов в удаленных космических источниках. Основным источником фотонов гамма-излучения высоких энергий в ядерных реакциях служит распад  $\pi$ -мезонов, генерируемых в реакциях элементарных частиц высоких энергий. К третьей группе относят аннигиляционные процессы. Аннигиляция вещества и антивещества является эффективным механизмом генерации гамма-излучения. При аннигиляции электрона и позитрона образуется либо два фотона, с энергией  $0,511\text{МэВ}$ , либо три фотона с непрерывным частотным спектром. Аннигиляция протонов и антипротонов сопровождается образованием мезонов. Нейтральные мезоны распадаются на гамма-фотоны. Энергетический спектр такого гамма-излучения близок к спектру, который наблюдается при взаимодействии космических лучей с межзвездным газом. (Космические лучи – частицы высоких энергий, образующиеся в космосе при различных процессах в звездах и межзвездном пространстве).

**Гамма-астрономия** исследует космические объекты и процессы по характерному для них жесткому электромагнитному излучению с энергией фотонов выше  $100\text{кэВ}$ . Такие фотоны образуются при взаимодействиях частиц высоких энергий. Гамма излучение обладает высокой проникающей способностью. Оно незначительно поглощается в межзвездной среде и поэтому может пройти до Земли с расстояний в сотни раз больших, чем фотоны видимого диапазона. Атмосфера Земли препятствует проникновению гамма излучения до земной поверхности, рассеивая и поглощая фотоны на высотах 30-50 км. Фотоны гамма излучения с энергией  $E \leq 20\text{МэВ}$  испытывают комптоновское рассеяние, а фотоны больших энергий порождают электрон-позитронные пары.

**Рентгеновская астрономия. Рентгеновское излучение** Рентгеновское излучение – это электромагнитное ионизирующее излучение с длиной волны от  $10^{-4}$  до  $10^{-2}\text{А}$  ( $10^{-12}$ - $10^{-5}\text{см}$ ), открытое немецким физиком В.К. Рентгеном в 1895 году. Условно излучение с длиной волны меньше  $2\text{А}$  называют жестким, а излучение с длиной волны больше  $2\text{А}$  – мягким. Наиболее распространенный лабораторный источник – рентгеновская трубка, в которой ускоренные электрическим полем электроны бомбардируют металлический анод.

Рентгеновское излучение может быть получено также при бомбардировке мишени ионами высокой энергии. Источником могут быть радиоактивные изотопы. Некоторые из таких изотопов непосредственно испускают рентгеновское излучение. Другие изотопы испускают электроны или альфа – частицы, которые при бомбардировке металлической мишени испускают рентгеновское излучение. Рентгеновское излучение может возникать при движении заряженных частиц высокой энергии в магнитном поле (синхротронное или магнитотормозное излучение). Спектр излучения может быть непрерывным и линейчатым (дискретным). Непрерывный (тормозной) спектр испускают быстрые заряженные частицы в результате торможения при взаимодействии с атомами мишени. Линейчатый спектр возникает после ионизации атома с выбрасыванием электрона с одной из его внутренних оболочек при столкновениях атома с быстро заряженной частицей (первичное рентгеновское излучение), или при поглощении атомом кванта электромагнитного излучения (флуоресцентное рентгеновское излучение). Частоты дискретного спектра характерны для атома каждого химического элемента, так как они определяются дискретным энергетическим спектром атома, который индивидуален для каждого химического элемента. Поэтому такие спектры называют характеристическими.

**Рентгеновская астрономия** исследует космические объекты по их рентгеновскому излучению с энергией фотонов от  $0,1$  до  $100\text{кэВ}$ , что соответствует длине электромагнитных волн от  $100$  до  $0,1\text{А}$ . Так как атмосфера Земли препятствует прохождению волн рентгеновского диапазона к поверхности, то первые данные о радиоизлучении Солнца были получены при помощи аппаратов, поднятых на высотных ракетах только в 50-х годах 20 века. Радиоизлучение Солнца состоит из непрерывного излучения горячей корональной плазмы и линейчатого излучения высокоионизованных тяжелых ионов, вплоть до водородоподобных. (Водородоподобные ионы – это ионы с одним электроном, например, 26-кратные ионы железа). В 1962 году группа американских исследователей с помощью аппаратуры, установленной на высотных ракетах, обнаружила сильный источник радиоизлучения в созвездии Скорпиона. В этом же эксперименте было открыто рентгеновское излучение фона неба, которое ученые предполагают не связанным с дискретными источниками. До конца 70-х годов исследования рентгеновского излучения проводилось с помощью ракет до высоты 500 км. Выведение на орбиту искусственных спутников Земли с рентгеновскими телескопами позволило более детально изучить астрофизические механизмы генерации рентгеновского излучения. Запуск аппаратов в межпланетное и межзвездное пространство еще более расширили возможности рентгеновской астрономии. Рассмотрим более подробно выводы

современной астрофизики о механизмах генерации волн рентгеновского диапазона и, следовательно, выводы о протекании соответствующих процессов в космическом пространстве, полученные на основе информации космических аппаратов.

Широкий спектр электромагнитного излучения с энергией фотонов вплоть до исходной энергии электрона *может генерироваться* при торможении (изменении скорости) свободных электронов в результате их близкого пролёта от заряженных ядер. Так как вероятность кулоновского взаимодействия свободного электрона с ядром велика, то этот механизм является одним из главных источников генерации жёстких фотонов в ультрафиолетовой и рентгеновских областях (вплоть до энергии **0,1 МэВ**), а также важнейшим механизмом потерь энергии электронами. Если фотоны рождаются в равновесной плазме с максвелловским распределением частиц по скоростям, то наблюдается тепловое излучение, которое для большой *оптической толщи* является планковским излучением абсолютно чёрного тела. (*Максвелловское распределение частиц по скоростям соответствует равновесному состоянию системы, состоящей из большого количества частиц. Планковское излучение – это равновесное излучение, состояние которого описывается формулой Планка, соответствующей известной экспериментальной кривой распределения энергии в спектре излучения абсолютно черного тела*). С ростом температуры максимум излучения сдвигается в коротковолновую сторону, достигая рентгеновского диапазона при  $T > 10^6 \text{ K}$  (закон смещения Вина). При этом полная интенсивность теплового излучения резко возрастает ( $I \sim T^4$ , закон Стефана-Больцмана). Звезда с температурой  $T \sim 10^6 \text{ K}$  при том же радиусе, что и Солнце, излучала бы энергии в  $10^9$  раз больше, чем Солнце, а при  $T = 10^7 \text{ K}$  её светимость превысила бы в 100 раз светимость всех звёзд Галактики. Очевидно, что таких тепловых источников рентгеновского излучения звёздной природы не существует.

Рентгеновские фотоны могут возникать при движении быстрых электронов в магнитных полях, которые являются одним из важнейших составляющих Вселенной (магнитные поля звезд, планет, межзвездного и межпланетного пространства). При напряжённости поля  $H \sim 10^{-4} - 10^{-3} \text{ Э}$  рентгеновские фотоны испускаются электронами с энергией  $\geq 10^{13} \text{ эВ}$ . При степенном спектре энергий электронов генерироваться будет также степенной спектр рентгеновского излучения.

Фотоны рентгеновского диапазона в Космосе могут возникать за счет получения фотонами малых энергий (видимого, радио- или инфракрасного диапазонов) при их рассеянии на релятивистских электронах (обратный Комптон эффект). Средняя плотность энергии возникающего рентгеновского излучения при этом равна  $(3,4)\omega_p(E/m_e c^2)^2$ , где  $E$  - энергия электронов,  $\omega_p$  - плотность энергии низко частотных фотонов, соответствующая температуре  $T_p$ . Например, для  $T_p = 150 \text{ K}$  (инфракрасное излучение с  $\lambda_{max} = 20 \text{ мкм}$ ) электроны с энергией **100 МэВ** будут генерировать рентгеновские фотоны с  $E = 2 \text{ кэВ}$ .

Комптоновское рассеяние может приводить к генерации жёсткого рентгеновского излучения в источниках, в которых одновременно рождается большой поток инфракрасного излучения и происходит ускорение электронов до высоких энергий. Аналогичный механизм может давать фотоны рентгеновского излучения при рассеянии релятивистских электронов высоких энергий на фотонах реликтового субмиллиметрового излучения. Электроны с энергией **500 МэВ** могут при этом испускать фотоны со средней энергией **1 кэВ**.

Линейчатое, характеристическое, рентгеновское излучение возникает при переходах электронов тяжёлых атомов или ионов на нижние уровни энергии. В атомах тяжелых элементов расстояние между нижними энергетическими уровнями очень велико. Поэтому соответствующие этим уровням излучательные переходы сопровождаются испусканием кванта высокой энергии. Например, переход электрона в атоме кислорода на внутренний **K** уровень даёт фотон с  $E=0,5 \text{ кэВ}$ , аналогичный переход в атоме железа фотон с  $E=6,4 \text{ кэВ}$ . Именно такие процессы в ионах приводят к генерации дискретного спектра *солнечной короны* и межзвездного газа в оболочках *остатков вспышек сверхновых*, что позволяет судить об условиях в области генерации.

Решение уравнения Шредингера для свободных электронов в магнитном поле показало, что их спектр дискретный (уровни Ландау). Линейчатый рентгеновский спектр может возникать в случае свободных электронов, уровни энергии электрона которых квантованы в сильном магнитном поле, когда электроны движутся в направлении, перпендикулярном полю (уровни Ландау). Энергия может принимать при этом следующие значения:

$$E = h\nu = h\nu_B \left( n + \frac{1}{2} + m_s \right),$$

где  $v_B = eV/(2\pi m_e c) - 0,1,2, \dots$ ;  $m_s$  - проекция спина электрона на направление магнитного поля ( $m_s = \pm \frac{1}{2}$ ).

Первой гармонике соответствуют переходы на уровень с  $m_s = \frac{1}{2}, n = 1$ , второй  $m_s = \frac{1}{2}, n = 2$  и так далее. Если горячая плазма в магнитном поле достаточно эффективно нагревается (в тесных двойных системах, например, за счёт выделяющейся при **аккреции** гравитационной энергии), то такая плазма может быть стационарным источником **циклотронного излучения**. Электронная циклотронная линия (гиролиния) обнаружена, по-видимому, в коротковолновой части ( $E = 58 \text{ кэВ}$ ) рентгеновского спектра источника HerX-1. Такой высокой энергии фотонов с учётом их «покраснения» в гравитационном поле нейтронной звезды с массой  $1 m$  и радиусом  $10 \text{ км}$  соответствует величина магнитного поля на поверхности звезды  $B \approx 6 \cdot 10^{12} \text{ Гс}$  («покраснение» фотона означает уменьшение его энергии вследствие работы, затраченной на преодоление силы гравитации; уменьшение энергии означает увеличение длины волны, то есть ее смещение в сторону длинноволновой, красноволновой части спектра). Гиролиния проявляется особенно сильно, если выполняется условие  $kT_e \gg h\nu_B$ , где  $T_e$  - температура электронной составляющей плазмы.

Детекторами рентгеновского излучения служат приборы двух типов: для фотонов с  $E \leq 20 - 30 \text{ кэВ}$  - детекторы, работающие с использованием **фотоэффекта** в газе или с поверхности твёрдого тела; для фотонов с  $E$  от  $30 \text{ кэВ}$  до  $10 \text{ МэВ}$  - сцинтилляционные детекторы. Приборы первого типа - пропорциональные газонаполненные счётчики, амплитуда импульса на выходе которых пропорциональна (в некотором диапазоне длин волн) энергии падающего фотона. Эффективность такого детектора (отношение числа зарегистрированных фотонов к общему их числу) определяется сечением поглощения (фотоионизации) газа-наполнителя и коэффициентом пропускания окна счётчика. Пропорциональные счётчики наполняют обычно инертным газом (Ar, Xe) при давлении около 1 атм.

**Ультрафиолетовая астрономия. Ультрафиолетовое излучение.** Ближнее ультрафиолетовое излучение открыто в 1801 году немецким ученым И.В. Риттером и английским ученым У.Волластоном. Вакуумное до  $130 \text{ нм}$  немецким ученым В Шуманом 1885-1903 год, до  $25 \text{ нм}$  - английским физиком Т.Лаймоном 1924 год. Промежуток между вакуумным ультрафиолетовым излучением и рентгеновским изучением открыт к 1927 году. Спектр может быть линейчатым (источники - изолированные атомы, ионы, легкие молекулы), непрерывным (тормозное или рекомбинационное излучение), полосатым (спектр тяжелых молекул). Заметную долю ультрафиолетового излучения содержат спектры излучения накаливаемых тел, с температурой  $\sim 3000 \text{ К}$ . Спектр непрерывный, его интенсивность растет с увеличением температуры. Более мощный источник - высокотемпературная плазма. Непрерывное ультрафиолетовое излучение испускают электроны в ускорителях (синхротронное излучение). Естественным источником ультрафиолетового излучения являются Солнце, звезды, туманности и другие космические объекты. Однако, лишь длинноволновая часть их излучения (длина волны больше  $290 \text{ нм}$ ) достигает земной поверхности. Более коротковолновое излучение поглощается атмосферой на высотах от  $30$  до  $200 \text{ км}$ . Это погашаемое излучение играет большую роль в атмосферных процессах. Ультрафиолетовое излучение звезд и других космических объектов в интервале  $91,2 - 20 \text{ нм}$  практически полностью поглощается в межзвездном пространстве.

**Ультрафиолетовая астрономия** имеет дело с длинами волн примерно от  $100$  до  $3200 \text{ \AA}$  ( $10 - 320 \text{ нанометров}$ ). Свет на этих длинах волн поглощается атмосферой Земли, поэтому исследование этого диапазона выполняют в верхних слоях атмосферы или непосредственно в Космосе. Ультрафиолетовая астрономия имеет большое значение для изучения горячих звёзд (классов **O** и **B**), поскольку основная часть их излучения приходится именно на этот диапазон. К объектам исследования ультрафиолетовой астрономии относится излучение голубых звезд, остатков сверхновых, активных галактических ядер. Однако ультрафиолетовое излучение легко поглощается межзвёздной пылью, поэтому в результаты измерений следует вносить поправку на неё. Источники мощного ультрафиолетового излучения не так часто встречаются в космосе. В основном это очень горячие звезды большой светимости с температурой поверхности выше  $20-25 \text{ тыс. К}$ . По цвету такие звезды кажутся голубыми или бело-голубыми; типичным примером служит Ригель. Большинство подобных звезд сосредоточены в галактической плоскости, в спиральных ветвях. Их свет сильно ослабляется из-за поглощения газом и пылью, которые тоже сосредоточены в галактической

плоскости. Но интерес к ним астрономов велик, поскольку эти звезды молоды: их возраст исчисляется лишь миллионами лет. Однако и старые звезды в ядрах и нашей Галактики, и галактики Андромеды, и дальних звездных систем излучают гораздо больше УФ лучей, чем ожидалось. По-видимому, дело в том, что среди старых звезд также встречаются горячие объекты. Это звезды с очень низким содержанием металлов и белые карлики, уже прошедшие в своем развитии стадию красных гигантов. Измерение ультрафиолетового излучения звездных систем дает информацию к выяснению их звездного состава.

Наиболее высокую ультрафиолетовую светимость, причем, как правило быстропеременную, имеют активные ядра галактик и квазары. И излучение это исходит не только от горячих звезд. Там имеются незвездные, или, как говорят, нетепловые источники очень большой мощности. Излучение их природы - одна из актуальных задач астрономии.

**Оптический диапазон. Оптическая астрономия. Видимое излучение** - электромагнитные волны, воспринимаемые человеческим глазом. Чувствительность человеческого глаза к электромагнитному излучению зависит от длины волны (частоты) излучения, при этом максимум чувствительности приходится на **555 нм (540 ТГц)**, в зелёной части спектра. Поскольку при удалении от точки максимума чувствительность спадает до нуля постепенно, указать точные границы спектрального диапазона видимого излучения невозможно. Обычно в качестве коротковолновой границы принимают участок **380-400 нм (790-750 ТГц)**, а в качестве длинноволновой – **760-780 нм (395-385 ТГц)**. Электромагнитное излучение с такими длинами волн называется *видимым светом*, или просто *светом* (в узком смысле этого слова). Видимое излучение попадает в «оптическое окно», область спектра электромагнитного излучения, практически не поглощаемого земной атмосферой.

**Оптическая астрономия** (астрономия видимого света) - древнейшая форма исследования Космоса. Астрономия как наука зарождалась именно как оптическая астрономия, так как только в видимом диапазоне электромагнитного излучения из Космоса были доступны наблюдения. Сначала наблюдения зарисовывали от руки. В конце XIX века и большей части XX века исследования осуществлялись по фотографиям. Сейчас изображения получают цифровыми детекторами, в частности детекторами на основе приборов с зарядовой связью. Соответствующее оборудование, применяемое в видимом диапазоне, позволяет исследовать ближний ультрафиолетовый и инфракрасный диапазоны [10].

**Инфракрасное излучение. Инфракрасная астрономия. Инфракрасное излучение** открыто английским ученым У.Гершелем в 1800 году. Его спектр, как и спектр других диапазонов электромагнитных волн, может быть линейчатым, непрерывным и полосатым. Мощным источником инфракрасного излучения является Солнце, в излучении которого около 50% энергии излучения приходится на этот диапазон. Для сравнения: в лампах накаливания на инфракрасный диапазон приходится от 70 до 80% энергии излучения. Некоторые лазеры дают излучение в инфракрасном диапазоне.

**Инфракрасная астрономия** относится к диапазону длин волн от **0,8 мкм** - красная граница видимой области до **1 мм** – условная граница с радиодиапазоном. Максимум интенсивности теплового излучения в инфракрасной области дают относительно холодные объекты с температурой от **3 К до 2 - 3 тыс. К**: звезды поздних спектральных классов и окружающие их пылевые оболочки; звезды на начальных стадиях звездообразования, погруженные в протозвездные газопылевые облака; межзвездная пыль и газ, планеты и малые тела Солнечной системы. В длинноволновом участке инфракрасной области (субмиллиметровый диапазон) содержится основная часть энергии реликтового излучения, возникшего на ранней стадии расширения Вселенной. Как и в других диапазонах в этой области наблюдаются нетепловые источники космического излучения (главным образом от релятивистских электронов).

Инфракрасное излучение в спектре Солнца при помощи призмы и термометра в начале 19 века исследовал У.Гершель. Инфракрасная астрономия сформировалась к концу 60-х годов 20 века, когда Дж. Нейгебауэр и Р. Лейтон (США, 1969 г.) выполнили обзор северного неба на волне **2,2 мкм**. Был выявлен целый класс объектов, обладающих высокой интенсивностью в инфракрасном диапазоне. Интенсивность инфракрасного излучения оказалась большей, чем ожидалось по экстраполяции видимой части звездных спектров.

Основной механизм генерации галактического инфракрасного излучения – тепловой, а главная излучающая среда – межзвездная или околозвездная пыль. Помимо излучения пыли наблюдается линейчатое *излучение газа, обусловленное тонкой структурой уровней энергии атомов* (ионизованных атомов углерода, кислорода, неона и др) и переходами между вращательно-

колебательными и чисто вращательными уровнями энергии молекул  $CO$ ,  $OH$ ,  $SiO$ ,  $H_2$  и других. Наземные наблюдения проводятся в окнах прозрачности атмосферы.

**Радиоизлучение. Радиоастрономия.** Предсказанное теоретически Дж.Максвеллом существование электромагнитных волн было подтверждено Г.Герцем. В его опытах 1888 года впервые были получены электромагнитные волны с длиной волны в несколько десятков сантиметров, то есть волны радиодиапазона. В 1895 – 1899 А.С. Попов применил колебания с длиной волны  $\sim 10^2 - 2 \cdot 10^4$  см для осуществления беспроводной связи на расстоянии. В природе существуют естественные источники радиоволн во всех частотных диапазонах. Источником радиоволн является любое нагретое тело (тепловое излучение), звезды, в том числе Солнце, галактики и метagalактики. Радиоизлучение генерируется и при некоторых процессах в земной атмосфере, например, при разряде молний (атмосферика), при возбуждении колебаний в ионосферной плазме.

**Радиоастрономия.** В радиодиапазоне исследуются все космические тела и их комплексы от тел солнечной системы до метagalактики, а также межпланетная и межзвездная среда, межзвездная пыль, магнитные поля, космические лучи, реликтовое излучение и тому подобное. Радиоастрономия зародилась в начале 30-х годов 20 века. Открытие связано с изучением американским радиоинженером К. Янский помех радиотелефонной связи, при котором он обнаружил, что кроме помех земного происхождения есть радиопомехи космического происхождения. Мощный толчок развитию радиоастрономических исследований послужило развитие радиофизики после второй мировой волны. Радиоволны приходят к Земле со всех направлений на различных частотах, но на уровне Земли часть волн поглощается в атмосфере. Поэтому большое значение имеет вынос приборов за пределы атмосферы. Радиоастрономические наблюдения в отличие от оптических можно проводить и в облачную погоду, так как атмосферные условия слабо влияют на прохождение радиоволн, кроме коротковолнового сантиметрового и миллиметрового диапазонов.

Если наблюдать «радионебо», то можно было бы увидеть яркую полосу вдоль млечного пути со значительным увеличением яркости в галактическом центре (в оптическом излучении центр не наблюдаем из-за сильного поглощения света межзвездной пылью). Все небо усеяно радиозвездами и протяженными туманностями различной яркости. Интересно, что на месте многих оптически ярких звезд не видно даже слабых «радиозвезд». В то время как некоторые оптически слабые объекты, не видимые невооруженным глазом в радиолучах очень яркие. И наоборот на месте некоторых ярких «радиозвезд» можно увидеть далекие туманности и слабые звездообразные объекты – галактики и квазары, которые можно видеть только в очень сильные оптические телескопы.

Для наблюдателя Земли самым ярким объектом «радионеба» является Солнце из-за его близкого расстояния. Но мощность его радиоизлучения в миллионы раз меньше оптического. Отсюда видно, почему исследования радиоизлучения Космоса стало возможным только после создания гигантских высокочувствительных радиотелескопов. Вторым по потоку радиоизлучения источником является туманность в созвездии Кассиопеи - остаток вспышки сверхновой звезды. Абсолютное большинство наиболее мощных радиоисточников являются внегалактическими объектами (радиогалактики и квазары).

Приходящие из космического пространства радиоизлучение наблюдаются как в непрерывном, так и в дискретном (линейчатом) спектрах. Непрерывное радиоизлучение - излучение большого количества заряженных частиц в основном электронов. Наблюдается быстро и хаотически меняющийся во времени «радиосум», который «размазан» по широкому интервалу радиочастот, то есть имеет непрерывный частотный спектр. Одна из задач радиоастрономии - определение спектрального распределения потока энергии радиоволн от космических объектов. Спектральный состав радиоизлучения является важной характеристикой механизма излучения. Основными механизмами непрерывного радиоизлучения являются тормозное излучение и магнитотормозное излучение, в том числе синхротронное.

Основной механизм радиоизлучения с дискретным спектром (в линиях) связан с переходами между уровнями энергии атомов и молекул. Важным направлением радиоастрономии является изучение космических объектов в различных радиолиниях: радиолиния 21 см нейтрального водорода, 18 см - гидроксил, 1,35 см - вода. В 1951 году была открыта предсказанная в 1944 году радиолиния водорода 21 см. Эта линия является важнейшим инструментом исследования межзвездного водорода, дает информацию по его массе, характере распределения и кинематики как в нашей Галактике, так и в близких к нам галактиках. Линия излучения водорода 21 см является запрещенной линией, то есть запрещенной в смысле электродипольного перехода. Она излучается при переходе более высокого порядка, обусловлена взаимодействием магнитных моментов электрона и протона в атоме водорода. Энергия атома водорода при параллельном расположении магнитных моментов электрона и протона

несколько больше, чем при антипараллельном. При спонтанном изменении ориентации магнитного момента электрона на противоположную, атом излучает квант электромагнитного излучения с длиной волны 21,1 см. В межзвездном атомарном водороде устанавливается динамическое равновесие между актами излучения радиоквантов и возбуждением атомов оптическими квантами и соударением. Вероятность излучения очень мала, мала интенсивность излучения на данной длине волны. Но в галактических масштабах мощность радиоизлучения нейтрального водорода становится заметной, что позволяет его обнаруживать. Наблюдения линии 21 см. дает информацию о распределении нейтрального водорода в Галактике и о движении облаков в Галактике.

Линия нейтрального водорода является важнейшей в радиоастрономии, так как более половины массы межзвездного вещества составляет нейтральный водород, который можно исследовать только в линии 21 см. Исследование излучения нейтрального водорода позволили получить информацию о структуре Галактики, в частности выявить спиральные рукава. Измерение доплеровского смещения позволяет измерять скорость облаков нейтрального водорода относительно Земли и красное смещение других Галактик.

В 1945-1946 годах радиолокация Луны и других тел Солнечной системы позволила уточнить астрономическую единицу длины, а также изучать строение твердых поверхностей планет. Исследование радиоизлучения Луны на различных длинах волн позволило установить, что ее поверхность покрыта слоем пыли. Была обнаружена высокая 600 К температура поверхности Венеры; открыта магнитосфера планеты Юпитер, его мощное всплесковое излучение на дециметровых волнах. На метровых длинах волн изучалось фоновое радиоизлучение Галактики. Мощные радиоисточники обнаружены в созвездии Лебедя (радиогалактика Лебедь А).

В 50-е годы 20 века была установлена синхротронная природа радиоизлучения многих космических радиоисточников. Нестационарность радиоизлучения дает информацию о вероятных источниках космических лучей. По наблюдаемым параметрам синхротронного радиоисточника (поток излучения, размер источника) оценивается напряженность магнитного поля, концентрация релятивистских электронов, энергосодержание радиоисточника. Очень мощное электромагнитное излучение в широком диапазоне от радиоволн до рентгеновских дают далекие звездообразные оптические объекты – квазары, находящиеся на больших космологических расстояниях. Расстояние оценивалось по красному смещению эмиссионных линий, которое у квазаров оказалось очень большим, что указывало на их удаленность. Излучение гидроксилон OH линии с длиной волны 18 см показало, что оно обусловлено мазерным механизмом. Его источником является компактные богатые молекулами газополевые комплексы вблизи зарождающихся звезд. В 1964 году обнаружены рекомбинационные радиолнии возбужденного водорода. Механизм их возникновения согласно объясняется следующим образом. В межзвездной среде при низкой плотности вещества может происходить рекомбинация заряженных частиц электронов и ионов, в результате которой возможно образование атомов с высоким уровнем возбуждения. При последующих переходах на уровни с меньшей энергией в силу малой разницы энергии между возбужденными уровнями происходит испускание фотонов в радиодиапазоне.

Исследования всего диапазона электромагнитных волн, приходящих к Земле из космического пространства, проводимые на Земле и в Космосе внесли и продолжают вносить большой вклад в исследование процессов, протекающих в окружающем нас пространстве, в понимание физической картины мира.

### **1.12 Электромагнитное излучение звезд. Нейтронные звезды**

Исследования электромагнитного излучения, приходящего к Земле из Космоса, позволяют делать выводы о протекающих процессах на основе лабораторных и теоретических исследований механизмов излучения. В то же время анализ такого излучения ставит перед учеными новые вопросы, поиск ответа на которые углубляет и расширяет научные знания. В качестве примера электромагнитного излучения звезд рассмотрим нейтронные звезды, которые в современной астрофизике рассматриваются как одни из самых интересных астрономических объектов: высокая плотность, сильное гравитационное поле, состояние сверхтекучести и сверхпроводимости. Их излучение обусловлено сверхсильными магнитными полями. Возможность существования нейтронных звезд предсказал в 1932 году Л.Д. Ландау сразу же после открытия нейтрона. Обнаружены они как пульсирующие источники электромагнитных волн в радиодиапазоне после II мировой войны в период, когда бурно развивалась радиоастрономия. Открытие в 1967 году

радиопульсаров доказало существование нейтронных звезд. Значимость этого открытия для науки подтверждена присуждением Нобелевской премии 1974 года. В настоящее время известно почти 2000 нейтронных звезд. Из них большая часть – радиопульсары. В 2003 году открыт двойной радиопульсар, в котором обе нейтронные звезды испускают радиоимпульсы. Радиопульсаром может быть система двух нейтронных звезд или пара, состоящая из черной дыры и нейтронной звезды. Источники, называемые радиопульсарами, излучают электромагнитные волны во всем спектре от радио до гамма.

Исследования показали, что пульсары излучают за счет энергии вращения. Вследствие излучения электромагнитных волн и релятивистских частиц энергия пульсара уменьшается, при этом период вращения звезды увеличивается. Торможение происходит за счет магнитных полей: чем сильнее поле, тем эффективнее торможение. Но механизм излучения, то есть как энергия вращения переходит в импульсы электромагнитного излучения, является проблемой для современной науки. Скорость потери энергии звездой зависит от ее массы, периода и скорости вращения и от величины магнитного поля. Интересным для науки оказался особый тип одиночных нейтронных звезд, которые называют «великолепная семерка». Это семь близких к Земле радиотихих, то есть не излучающих или мало излучающих в радиодиапазоне, одиночных нейтронных звезд. Семерка более легкая по сравнению с другими нейтронными звездами. У них очень высокая скорость до 100 км/с. При такой скорости не может быть аккреции, которая могла бы стать источником энергии. Звезды «великолепной семерки» ставят вопросы о природе их существования.

Пульсары, то есть источники пульсирующего электромагнитного излучения, наблюдаются и в рентгеновском диапазоне. Обычные рентгеновские пульсары чаще всего двойные системы с аккрецирующей нейтронной звездой. Вещество, падающее на нейтронную звезду, выделяет много энергии в ультрафиолетовом, рентгеновском и гамма-диапазонах. Процесс четко периодический. Наблюдаются импульсы с периодами от долей секунд до десятка минут, что является следствием вращения нейтронной звезды. Период такого пульсара – это период вращения нейтронной звезды. Обнаружены также объекты с периодом пульсаций **5–10 с.**, но не удалось обнаружить звезды компаньона. Период их пульсации все время растет. Спектр излучения отличается от спектров основной массы рентгеновских пульсаров. По последним данным считается, что аномальные рентгеновские пульсары – это нейтронные звезды со сверхсильными магнитными полями. Их называют магнитарами. Слово «магнитар» в 1992 году ввели К.Томсон и Р.Дункан. Исследования показали, что замедление вращения не может объяснить рентгеновскую светимость магнитара. Предполагается, что рентгеновская светимость аномальных пульсаров – следствие распада магнитного поля, то есть в энергию радиоизлучения преобразуется энергия магнитного поля, которое создает электрические токи в плазме коры звезды.

В тесной двойной системе может происходить перетекание вещества от одного объекта к другому неоднократно. Без такого обмена веществом невозможно объяснить образование большинства двойных рентгеновских источников, двойных и миллисекундных радиопульсаров. В системах с нейтронными звездами и черными дырами, вещество разгоняется до больших скоростей гравитационным полем, а затем при торможении высвечивает свою энергию квантами рентгеновского излучения. В настоящее время известно несколько десятков рентгеновских пульсаров и значительно большее количество радиопульсаров.

Для современной астрофизики загадочными объектами являются **гамма-всплески**, источники которых находятся на больших расстояниях. Их возникновение ученые связывают с возможностью слияния нейтронных звезд. Гамма-всплески обнаружены в 60-е годы XX века на спутниках, предназначенных для обнаружения ядерных испытаний. Обнаружено более 3000 таких всплесков, равномерно распределенных по небу. Анализ наблюдений позволил ученым сделать вывод о том, что источником гамма-всплесков являются далекие галактики. Их механизм не раскрыт, выдвигаются различные гипотезы. Среди них: слияние компактных объектов или взрыв очень массивной звезды («гиперновые»). Гамма-всплески продолжительностью менее 1 секунды могут быть результатом слияния компактных объектов, а более длительные – следствие гиперновых. Астрофизика компактных объектов – бурно развивающаяся область современной науки.

Таким образом, наблюдение излучения трех типов нейтронных звезд (радиопульсары – источники мягких повторяющихся гамма-всплесков (МПП), аномальные рентгеновские пульсары, великолепная семерка) является важным источником информации и материалом для дальнейшего исследования электромагнитных процессов в Космосе. Программы по физике и астрономии позволяют дать обучаемым необходимые знания об электромагнитных волнах, механизмах их излучения. Включение в процесс обучения вопросов всеволновой астрономии может способствовать

повышению познавательной активности, стремлению к более глубокому пониманию физической картины окружающего мира. Наличие значительного количества информации в печатных изданиях и в Глобальной информационной сети (Интернет) позволяет организацию проектной деятельности по различным вопросам астрофизики, в том числе проблемным. Такая работа в школе может способствовать профессиональной ориентации учащихся на научную деятельность.

### **Вопросы для контроля знаний**

1. Электромагнитное взаимодействие в содержании обучения физике.
2. Электромагнитное взаимодействие в системе фундаментальных взаимодействий.
3. Характеристики электромагнитного взаимодействия.
4. Обменное взаимодействие.
5. Обменный механизм электромагнитного взаимодействия.
6. Виртуальные частицы.
7. Проблема создания единой теории поля.
8. Теория великого объединения.
9. Роль электромагнитного взаимодействия в физической науке.
10. История электромагнитных исследований.
11. Электрический заряд, его свойства.
12. Закон сохранения электрического заряда в интегральной и дифференциальной формах.
13. Электрическое и магнитное взаимодействие электрических зарядов.
14. Сила магнитного взаимодействия.
15. Электромагнитное поле.
16. Дифференциальные уравнения Максвелла.
17. Квантовая электродинамика.
18. Калибровочная инвариантность.
19. Масса фотона.
20. Электромагнитные волны.
21. Классификация по длинам волн и частоте.
22. Тепловые источники излучения. Реликтовое излучение во Вселенной.
23. Механизмы излучения ЭМВ.
24. Классические механизмы излучения ЭМВ.
25. Квантовые механизмы излучения ЭМВ.
26. Всеволновая астрономия.
27. Виды спектров.
28. Рентгеновская астрономия.
29. Ультрафиолетовая астрономия.
30. Оптическая астрономия.
31. Инфракрасная астрономия.
32. Радиоастрономия.
33. Электромагнитное излучение звезд. Нейтронные звезды.
34. Гамма-всплески.

## Глава 2. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ И ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКИ

### 2.1 Магнитное поле в вакууме и его характеристики.

Явления земного магнетизма и магнитные свойства постоянных магнитов были известны еще в глубокой древности.

Развитие физики в XIX в. показало, что намагниченные тела взаимодействуют друг с другом благодаря наличию вокруг них магнитных полей. Магнитное поле порождается электрическим током, движущимися электрическими зарядами. Движущиеся в магнитных полях электрические заряды испытывают в них силовое воздействие.

Свойства стационарного магнитного поля (поля постоянных электрических токов или поля постоянных магнитов) изучаются в магнитостатике – в одном из разделов теории электромагнитного поля.

При этом, хотя законы природы и обнаруживают большую степень подобия между электрическими и магнитными полями (например, уравнения Максвелла одни и те же для обеих полей), между ними имеется большое различие.

Частицы с электрическими зарядами (положительными и отрицательными) постоянно наблюдаются в природе, они создают в окружающем пространстве кулоновское электрическое поле. Магнитные же заряды (ни положительные, ни отрицательные) никогда не наблюдались по отдельности. Магнит всегда имеет два равных по величине полюса на двух своих концах - северный и южный, и магнитное поле вокруг него является результирующим полем обоих полюсов.

Законы классической электродинамики допускают существование частиц с одним магнитным полюсом - магнитных монополей и дают для них определенные уравнения как для поля, так и уравнения движения самих монополей. Гипотеза о существовании магнитных монополей, т.е. частицы, обладающей положительным или отрицательным магнитным зарядом, была высказана Дираком (1931), поэтому магнитный монополь называют также монополем Дирака.

В квантовой механике уравнения движения для заряженной частицы, движущейся в поле магнитного монополя, и для магнитного монополя, движущегося в поле заряженной частицы, можно установить при условии представления движущихся частиц в виде волн, распространяющихся в пространстве, для которых характерны интерференционные эффекты. При этом если магнитный монополь с магнитным зарядом  $m_0$  существует, то все заряженные частицы в его окрестности должны иметь квантованный заряд, что имело бы естественное объяснение (данное утверждение совпадает с одним из фундаментальных законов природы о квантовании электрических зарядов заряженных тел в электростатике). Это, в свою очередь, означает, что с помощью современных методов исследования можно обнаружить магнитный монополь (например, по характеру трека быстро движущегося магнитного монополя в камере Вильсона или в пузырьковой камере). Однако треки монополей в камере Вильсона до сих пор не обнаружены.

Можно предположить, что магнитный монополь – это стабильная частица, которая не может исчезнуть до тех пор, пока не встретится с другим монополем, имеющим равный по величине и противоположный по знаку магнитный заряд. В этом случае магнитные монополи должны генерироваться высокоэнергетическими космическими лучами (непрерывно падающими на Землю), т.е. они должны встречаться повсюду на земной поверхности. Однако и в данном случае магнитные монополи не обнаружены, что может быть связано либо с их редкой рождаемостью, либо с тем, что они вовсе не существуют.

Таким образом, гипотезы о существовании магнитных зарядов (магнитных монополей) не имеют экспериментальных подтверждений, хотя ими можно воспользоваться для установления законов в магнитостатике.

При изучении магнитных полей в магнитостатике часто пользуются понятием магнитного заряда, что позволяет применять формулы, аналогичные формулам электростатики. Формально это возможно благодаря теореме Ампера об эквивалентности поля магнитных зарядов и поля постоянных электрических токов.

Теорема Ампера устанавливает, что магнитное поле предельно тонкого плоского магнита («магнитного листка», образованного из одинаково ориентированных элементарных магнетиков) тождественно полю замкнутого (кругового) линейного тока. Или магнитное поле  $\mathbf{H}$  кругового линейного тока силой  $I$  эквивалентно полю магнитного листка в том случае, если плотность

магнитных моментов диполей (элементарных магнитиков), образующих листок, численно равна силе тока  $I$  (А).

Таким образом, из теоремы Ампера вытекает тот факт, что магнитные поля замкнутых постоянных токов можно рассматривать как поля фиктивных «магнитных зарядов» (положительных и отрицательных, попарно образующих магнитный диполь) и тем самым сводить задачу изучения магнитных полей постоянных электрических токов к магнитостатике.

Для исследования магнитных полей, т.е. для измерения механических воздействий магнитных полей на движущиеся в них электрические заряды, выбирают так называемый пробный ток, существующий в плоском замкнутом контуре малых размеров (круговой ток). Положение этого контура в пространстве определяется с помощью положительной нормали  $\mathbf{n}$ , связанной с током в контуре правилом правого винта (рис. 2.1).

При внесении такого контура с током в магнитное поле на него действует вращающий момент, стремящийся повернуть его так, чтобы направление положительной нормали  $\mathbf{n}$  совпало с направлением магнитного поля в данном месте пространства. Величина этого вращающего момента стремится к максимуму при  $\alpha \rightarrow \pi/2$  и к минимуму при  $\alpha \rightarrow 0$ . Угол  $\alpha$  - угол между направлением положительной нормали  $\mathbf{n}$  и направлением магнитного поля. Кроме того, величина этого момента зависит как от свойств контура, так и от свойств среды, в которой существует магнитное поле.

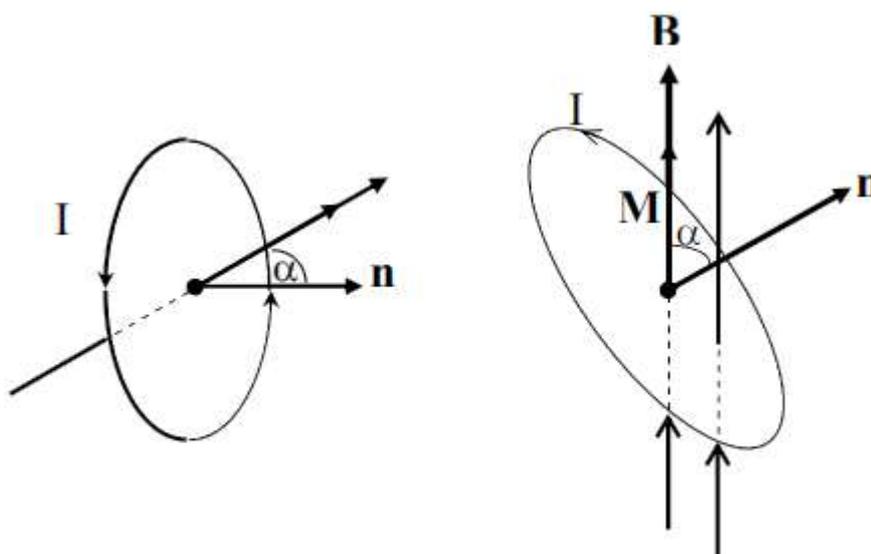


Рисунок 2.1 Воздействия магнитных полей на движущиеся в них электрические заряды

Свойства контура в основном определяются векторной физической величиной магнитным моментом  $\mathbf{p}_m$ , численное значение которого равно

$$p_m = IS,$$

где  $I$  - величина тока в контуре;  $S$  – площадь, охватываемая контуром.

Направление магнитного момента контура связано с направлением тока в нем правилом правого винта.

Численное значение вращающего момента, действующего на пробный контур в магнитном поле, пропорционально магнитному моменту контура и синусу угла  $\alpha$ :

$$M_{вр} \sim p_m \cdot \sin\alpha.$$

Следовательно, на пробные контуры с различными значениями  $p_m$  со стороны поля действуют различные по величине вращающие моменты  $M_{вр}$ .

Однако оказывается, что отношение максимального вращающего момента  $M_{max}$ , действующего на пробный контур со стороны магнитного поля, к магнитному моменту контура  $p_m$ , для любых контуров, помещенных в данную точку поля, остается величиной постоянной. Следовательно, оно может служить характеристикой магнитного поля.

Эту величину называют индукцией магнитного поля  $B$ . Индукция магнитного поля  $B$  связана с вращающим моментом  $M_{вр}$  соотношением

$$M_{\text{вр}} = k p m B \cdot \sin \alpha,$$

где  $k$  - коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц измерения физических величин.

При  $k = 1$

$$M_{\text{вр}} = p m B \cdot \sin \alpha. \quad (2.1)$$

Формула (2.1) – это модуль векторного произведения:

$$\overrightarrow{M_{\text{вр}}} = [\overrightarrow{p_m} * \overrightarrow{B}]$$

Из соотношения (2.1)

$$B = \frac{M_{\text{вр}}}{p_m \sin \alpha}$$

При  $p_m = 1$  и  $\sin \alpha = 1$   $|B| = |M_{\text{вр}}|$ , т.е. индукция магнитного поля численно равна вращающему моменту, действующему на пробный контур, помещенный перпендикулярно к направлению магнитного поля в данную точку, магнитный момент которого равен единице. Таким образом, индукция магнитного поля характеризует силовое воздействие магнитного поля на ток (движущиеся электрические заряды). Помимо макротоков, представляющих собой упорядоченное движение электрических зарядов в объеме проводника, в любом веществе существуют микротоки, возникновение которых можно объяснить наличием в атомах вещества вращающихся вокруг ядер с большой скоростью ( $\sim 10^{15} \text{ с}^{-1}$ ) электронов. Поэтому можно считать, что заряд и масса равномерно распределены по орбите электронов, т.е. движение каждого электрона эквивалентно замкнутому контуру с током. Тогда любой атом, любую молекулу вещества можно рассматривать как совокупность микротоков. Микротоки вещества создают свое собственное магнитное поле и взаимодействуют с внешним магнитным полем. На основании принципа суперпозиции магнитных полей (по аналогии с принципом суперпозиции электрических полей) в пространстве может существовать результирующее магнитное поле макро- и микротоков. Индукция магнитного поля  $B$  (магнитная индукция) является характеристикой этого результирующего поля. Поэтому при прочих равных условиях и одном и том же макротоке в проводнике величина  $B$  в различных средах различна. Для характеристики магнитных полей, порождаемых только макротоками, вводится физическая величина, называемая напряженностью магнитного поля  $H$ . Напряженность магнитного поля  $H$  для ферромагнитных материалов связана с магнитной индукцией  $B$  соотношением

$$B = \mu \mu_0 H,$$

где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$  - магнитная постоянная вакуума;  $\mu$  - относительная магнитная проницаемость среды. Относительная магнитная проницаемость среды показывает, во сколько раз магнитное поле макротоков усиливается за счет магнитных полей микротоков. Графически магнитные поля изображают с помощью силовых линий векторов  $B$  или  $H$ , линий, проведенных в пространстве, касательная к которым в данной точке совпадает с направлением векторов  $B$  или  $H$  в данной точке. Существенным отличием силовых линий магнитного поля от силовых линий электростатического поля является то, что они всегда замкнуты.

## 2.2 Закон Био-Савара-Лапласа

### Магнетизм как релятивистский эффект

Пусть в неподвижной системе отсчета  $K$  вдоль  $Ox$  расположен проводник с током (рис. 2.2.). Выделим на проводнике элемент длиной  $dl$ . Если поперечное сечение проводника  $\Delta S$ , концентрация носителя заряда  $n$ ,  $e$  – элементарный заряд (например, заряд протона), то в объеме элемента  $dl$  находится электрический заряд

$$q = en * \Delta S * dl.$$

Будем считать скорость направленного движения зарядов в проводнике равной  $v$ . Предположим, что на расстоянии  $r$  от выделенного элемента проводника  $dl$  в подвижной системе  $K'$

со скоростью  $v$  движется электрический заряд  $q'$ . Направление движения системы  $K'$  (заряда  $q'$ ) совпадает с направлением тока в проводнике (элементе проводника  $d\ell$ ).

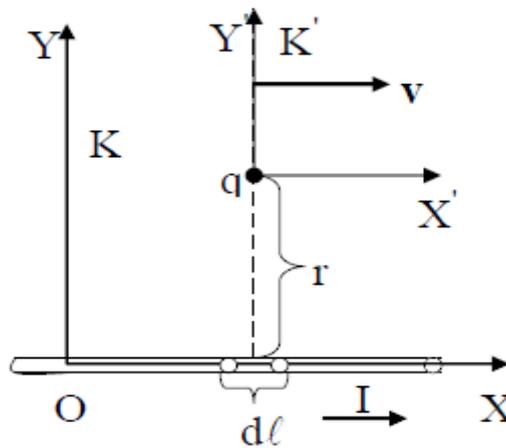


Рисунок 2.2 Проводник с током в разных системах отчета

Между силами, действующими на заряд в подвижной и неподвижной системах отсчета (с точки зрения специальной теории относительности), существует связь

$$F_Y = F'_Y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

где  $F_Y$  - сила, действующая на заряд в неподвижной системе отсчета;

$F'_Y$  - сила, действующая на заряд в подвижной системе отсчета.

На основании закона Кулона можно записать

$$F'_Y = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

тогда

$$F_Y = \frac{qen \cdot \Delta S \cdot d\ell'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (2.2)$$

Принимая во внимание Лоренцево сокращение элемента  $d\ell$ , фиксируемое наблюдателем, находящимся в системе  $K'$ , заменим в уравнении (2.2)  $d\ell'$  на

$$d\ell' = d\ell \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Будем иметь

$$F_Y = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{qen \cdot \Delta \cdot d\ell}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (2.3)$$

Первое слагаемое в выражении (2.3) представляет собой кулоновскую силу взаимодействия двух точечных зарядов:

$$F_{Y \text{ кул}} = \frac{qen \cdot \Delta S \cdot d\ell}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Это слагаемое значительно превосходит второе слагаемое, однако оказывается полностью скомпенсированным кулоновской силой, действующей на заряд  $q$  со стороны ионов, образующих кристаллическую решётку (любой элемент проводника электрически нейтрален). Нескомпенсированным остаётся второе слагаемое формулы (2.3), обусловленное магнитным взаимодействием движущихся зарядов:

$$F_{Y_{магн}} = -\frac{v^2 q_{en} \cdot \Delta S \cdot dl}{c^2 4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Знак «минус» в выражении означает, что сила магнитного взаимодействия (магнитная сила) в данном случае является силой притяжения. В то время как кулоновская сила (в данном случае) является силой отталкивания. Таким образом, с точки зрения теории относительности, между движущимися электрическими зарядами, помимо силы электрического происхождения, действует сила магнитного происхождения. Это позволяет утверждать, что в пространстве вокруг движущихся зарядов существует магнитное поле.

### Закон Био-Савара-Лапласа и алгоритм его применения

Из основных положений теории относительности было получено выражение для численного значения магнитной составляющей силы взаимодействия заряда и элемента тока:

$$F_{магн} = \frac{v^2 q_{en} \cdot \Delta S \cdot dl}{c^2 4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.4)$$

Обозначив постоянную  $\frac{1}{\epsilon_0 c^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м} \equiv \mu_0$  и учитывая, что  $en v \cdot \Delta S = I$ , перепишем формулу (2.4) в виде

$$F \left( \frac{\mu_0 I \cdot dl}{4\pi r^2} \right) qv.$$

Два последних сомножителя в данной формуле являются электрическим и кинетическим параметрами заряда  $q$ , а сомножитель в скобках характеризует магнитную компоненту электромагнитного поля, т.е. представляет элемент индукции магнитного поля  $dB$ . Таким образом

$$dB = \frac{\mu_0 I \cdot dl}{4\pi r^2}. \quad (2.5)$$

Следовательно, магнитное поле действительно является проявлением (частью) более общего электромагнитного поля. При этом очень существенным оказывается выбор системы отсчета. Так, например, если в данной системе отсчета заряд покоится ( $I = 0$ ), то магнитного поля вокруг этого заряда не существует  $dB = 0$ . При переходе в подвижную систему отсчета, с которой связан движущийся электрический заряд, появляется магнитная компонента электромагнитного поля ( $dB \neq 0$ ). Выражение (2.5) представляет элемент индукции магнитного поля для частного случая, когда интересующие точки поля лежат на перпендикуляре к элементу  $dl$ .

Еще до появления теории относительности Лаплас, обобщив результаты экспериментальных исследований, проведенных Био и Саваром, предложил формулу для расчета элемента индукции магнитного поля в общем случае

$$dB = \mu_0 \mu \frac{I \cdot dl \cdot \sin\alpha}{4\pi r^2},$$

где  $\alpha$ - угол между направлениями радиус-вектора, проведенного из элемент тока в интересующую точку пространства, и элементом тока  $I \cdot d\vec{l}$  (рис. 1.3);

$\mu$  - магнитная проницаемость вещества, безразмерная величина (для вакуума  $\mu = 1$ ).

В векторной форме закон Био-Савара-Лапласа для элемента индукции магнитного поля можно записать так:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu I [d\vec{l} \times \vec{r}]}{4\pi r^3}.$$

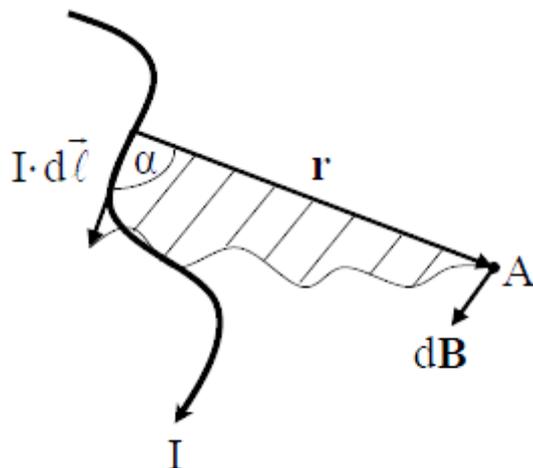


Рисунок 2.3

Поскольку  $d\vec{B}$  является результатом векторного произведения векторов  $I \cdot d\vec{\ell}$  и  $\vec{r}$ , то он перпендикулярен к плоскости, образованной векторами сомножителями, а его направление можно определить с помощью правила правого винта. Учитывая связь между вектором напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  и вектором индукции магнитного поля  $\vec{B}$ , для элемента напряженности  $d\vec{H}$  закон Био-Савара-Лапласа можно записать в виде

$$dH = \frac{I \cdot d\ell \cdot \sin\alpha}{4\pi r^2}$$

или в векторной форме

$$d\vec{H} = \frac{I[d\vec{\ell} \times \vec{r}]}{4\pi r^3}.$$

Чтобы получить значение вектора индукции (напряженности) магнитного поля, обусловленного произвольным проводником с током, необходимо этот проводник представить в виде совокупности элементов тока, записать выражение для элемента индукции (напряженности) магнитного поля, а затем произвести суммирование по всем элементам индукции (напряженности), т.е.

$$\vec{H} = \int d\vec{H} \text{ или } \vec{B} = \int d\vec{B}.$$

В этом смысл алгоритма применения закона Био-Савара-Лапласа для расчета магнитных полей, обусловленных постоянным током, и принципа суперпозиции магнитных полей, согласно которому если магнитное поле создано несколькими токами, то результирующее поле характеризуется результирующими векторами  $\vec{B}$  или  $\vec{H}$ , которые определяются (согласно принципу суперпозиции магнитных полей) так:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i \text{ и } \vec{H} = \sum_{i=1}^n \vec{H}_i.$$

### 2.3. Применение закона Био-Савара-Лапласа к расчету магнитных полей прямолинейного и кругового токов

**Магнитное поле прямолинейного бесконечно длинного проводника с током.** Определим напряженность магнитного поля, порождаемого бесконечно длинным проводником с током  $I$ , в точке  $A$ , равноудаленной от его концов (рис. 2.4,а). Для чего выделим некоторый участок проводника длиной  $d\ell$ , а рассматриваемую точку расположим на кратчайшем расстоянии  $r_0$  от него. На основании

закона Био-Савара-Лапласа каждый элемент проводника  $d\ell$  в рассматриваемой точке создает магнитное поле с напряженностью (рис. 2.4,б):

$$dH = \frac{I \cdot \sin\alpha}{4\pi r^2} d\ell,$$

где  $I$  - величина тока в проводнике;

$r$  - расстояние от элемента проводника  $d\ell$  до рассматриваемой точки поля;

$\alpha$  - угол между направлением тока в проводнике и направлением на рассматриваемую точку поля;

$d\ell = |d\vec{\ell}|$  - численное значение вектора, равного элементу проводника, направление которого совпадает с направлением тока.

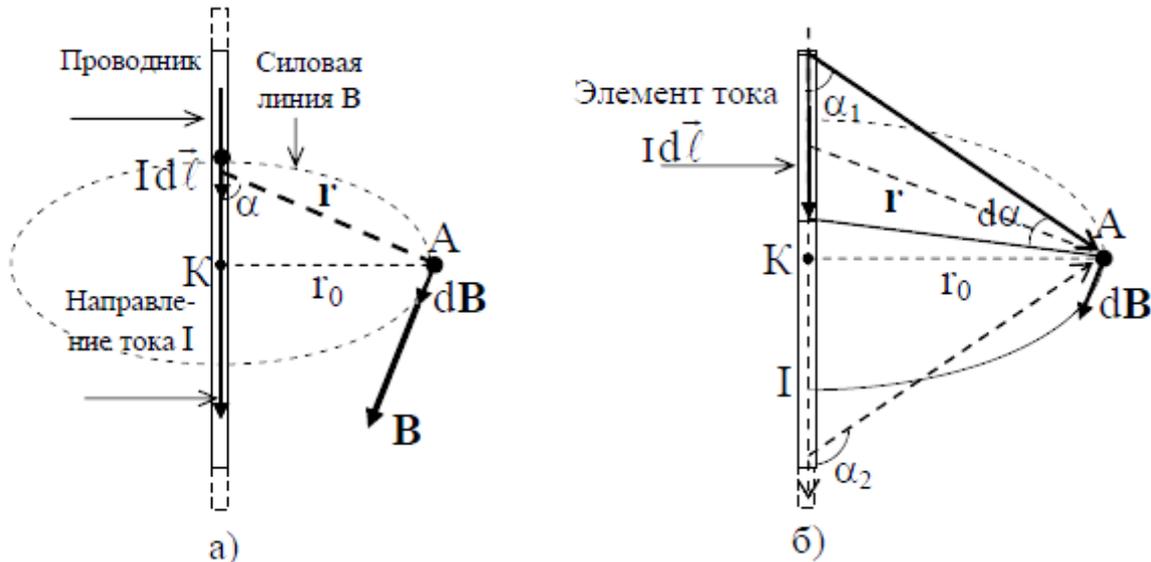


Рисунок 2.4 Напряженность магнитного поля, порождаемого бесконечно длинным проводником с током

Из рис. 1.4,б видно, что

$$d\ell = \frac{r \cdot d\alpha}{\sin\alpha}; r = \frac{r_0}{\sin\alpha}.$$

Тогда

$$dH = \frac{I}{4\pi \cdot r_0} \cdot \sin\alpha \cdot d\alpha. \quad (2.6)$$

Применив принцип суперпозиции магнитных полей, проинтегрировав выражение (2.6) в пределах от  $\alpha_1$  до  $\alpha_2$  (где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – соответственно углы между направлением тока в проводнике и направлением на рассматриваемую точку поля), получим

$$H = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{I}{4\pi r_0} \sin\alpha \cdot d\alpha = \frac{I}{4\pi r_0} \cdot (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

При симметричном расположении точки  $M$  относительно концов проводника  $\cos\alpha_1 = -\cos\alpha_2$ , тогда

$$H = \frac{I}{2\pi r_0} \cdot \cos\alpha_1$$

где

$$\cos\alpha_1 = \frac{\ell/2}{\sqrt{(\ell/2)^2 + r_0^2}}.$$

Для бесконечно длинного проводника  $\alpha_1 \rightarrow 0$ ,  $\alpha_2 \rightarrow \infty$ , тогда

$$H = \frac{I}{2\pi r_0}.$$

Направление векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  совпадает с направлением касательной к цилиндрической поверхности радиуса  $r$ . По мере удаления от проводника  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  убывают по гиперболе (рис. 2.5).

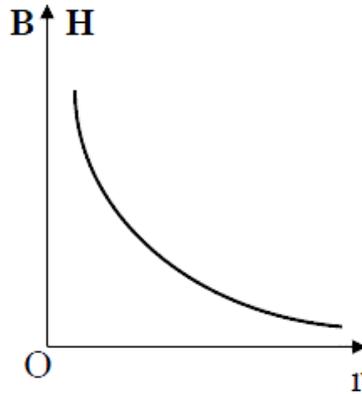


Рисунок 2.5 Зависимость  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  от радиуса

Зная связь между напряженностью и индукцией магнитного поля, можно получить соответствующие формулы для определения индукции магнитного поля:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2);$$

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r_0} \cos\alpha_1; \quad B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r_0}.$$

Параметры магнитного поля  $B$  и  $H$  остаются постоянными для любой точки, лежащей на цилиндрической поверхности, которой принадлежит точка  $A$  и ось которой совпадает с осью проводника. Это обусловлено цилиндрической симметрией магнитного поля бесконечного линейного тока (рис. 2.6).

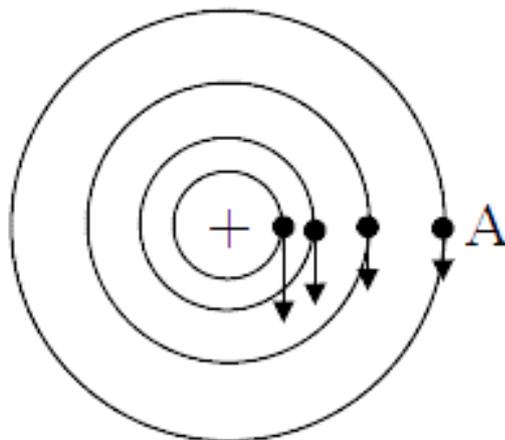
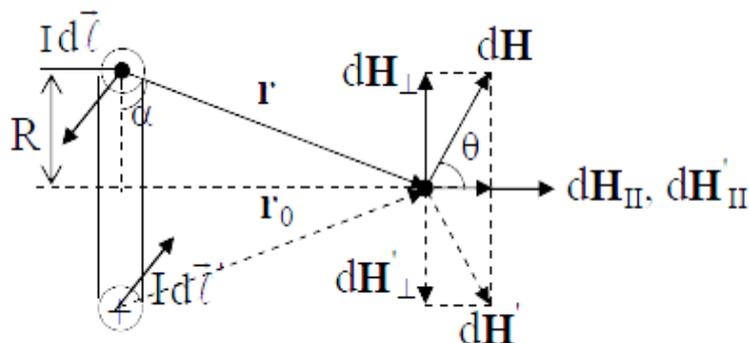


Рисунок 2.6 Симметрия магнитного поля

### Магнитное поле на оси кругового проводника с током

Магнитное поле на оси кругового проводника радиусом  $R$ , в котором существует ток  $I$ , является результирующим полем от всех элементов проводника  $d\ell$  (рис. 2.7). Каждый из диаметрально противоположных элементарных участков  $d\ell$  в точке, лежащей на оси проводника, создает свое собственное поле с напряженностью  $d\vec{H}$ . Вектор  $d\vec{H}$  направлен под углом  $\theta$  к оси проводника. Разложим  $d\vec{H}$  на две составляющие:  $d\vec{H}_{\parallel}$ , направленную вдоль оси, и  $d\vec{H}_{\perp}$ , перпендикулярную ей. Из рисунка можно установить, что для каждой пары диаметрально

противоположных участков  $d\vec{\ell}$  составляющие  $d\mathbf{H}_\perp$  равны по величине и противоположны по направлению, а составляющие  $d\mathbf{H}_\parallel$  равны по величине и одинаково направлены. Поэтому при геометрическом сложении элементарных напряженностей  $d\mathbf{H}$  от всех участков  $d\vec{\ell}$  составляющие  $d\mathbf{H}_\perp$  взаимно уничтожаются и результирующая напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$  в точке на оси кругового проводника будет равна алгебраической сумме всех  $d\mathbf{H}_\parallel$ , т.е. интегралу, взятому от  $d\mathbf{H}_\parallel$  по всему круговому контуру  $\ell$ :



$$\vec{H} = \int_{\ell} d\vec{H}_2. \quad (2.7)$$

Рисунок 2.7 Магнитное поле на оси кругового проводника с током

Численное значение

$$dH_{\parallel} = dH \cdot \cos\Theta = \frac{R}{r} dH,$$

где  $R$  - радиус кругового проводника;

$r$  - расстояние от элемента проводника  $d\ell$  до рассматриваемой точки поля.

Учитывая, что по закону Био-Савара-Лапласа  $dH = \frac{I \cdot \sin\alpha}{4\pi r^2} d\ell$  и что  $\alpha = 90^\circ$ , можем записать

$$dH_{\parallel} = \frac{IR}{4\pi r^3} d\ell.$$

Подставляя последнее выражение в формулу (2.7) и учитывая, что  $I$ ,  $R$  и  $r$  для всех участков кругового проводника одинаковы, получим

$$H = \frac{IR}{4\pi r^3} \int_{\ell} d\ell = \frac{IR\ell}{4\pi r^3}.$$

Так как  $\ell = 2\pi R$ ;  $r = \sqrt{R^2 + r_0^2}$ , то окончательное выражение напряженности поля примет вид

$$H = \frac{IR^2}{2\sqrt{(R^2 + r_0^2)^3}}.$$

Вектор напряженности магнитного поля направлен вдоль оси кругового проводника с током. Отметим, что при  $r_0 = 0$ , т.е. в центре кругового проводника, напряженность магнитного поля

$$H = \frac{I}{2R}.$$

На рис. 2.8 показана картина линий напряженности магнитного поля кругового тока. Для нахождения направления векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  в точках, лежащих на оси, применяется «правило буравчика»: буравчик располагается вдоль оси кругового тока и вращается по направлению тока, поступательное движение его укажет направление  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$ .

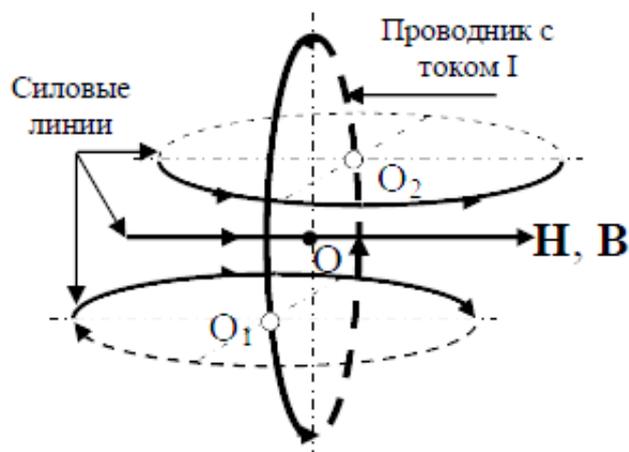


Рисунок 2.8 Линий напряженности магнитного поля кругового тока

## 2.4 Магнитное взаимодействие токов. Силы Лоренца и Ампера

Проводники с током (движущимися электрическими зарядами) создают вокруг себя магнитное поле и изменяют окружающее их магнитное поле, следовательно, магнитное поле действует как на движущиеся электрические заряды, так и на проводники с током.

При рассмотрении магнетизма как проявления релятивистского эффекта была получена обобщенная формула для численного значения силы взаимодействия между движущимся электрическим зарядом и элементом тока:

$$F = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{qen \cdot \Delta S \cdot d\ell}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

что после соответствующих преобразований в векторной форме можно записать так:

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q(\vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}]). \quad (2.8)$$

Формула (2.8) отображает силу, действующую на движущиеся электрические заряды в электромагнитном поле, которая называется обобщенной силой Лоренца.

Направление силы Лоренца определяется с помощью «правила левой руки» (если заряженная частица имеет отрицательный знак, то берется обратное направление) (рис. 2.9).

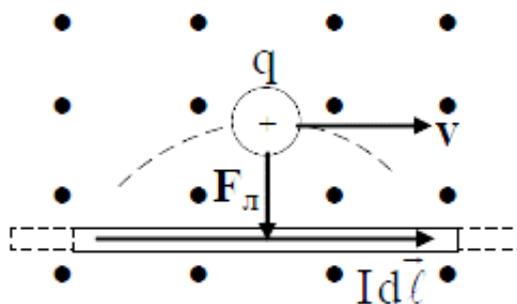


Рисунок 2.9 Направление силы Лоренца

В выражении (2.8) сила, действующая со стороны магнитной составляющей электромагнитного поля,

$$\vec{F}_m = q[\vec{v} \times \vec{B}]$$

перпендикулярна как скорости частицы  $\mathbf{v}$ , так и вектору индукции магнитного поля  $\mathbf{B}$ , а ее величина пропорциональна синусу угла между векторами. Когда векторы  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{B}$  коллинеарны, сила  $\mathbf{F}_m$  равна нулю.

В вакууме, в однородном постоянном магнитном поле ( $\mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mathbf{H}$ , где  $\mathbf{H}$  – напряженность магнитного поля,  $\mathbf{E} = 0$ ) заряженная частица движется по винтовой линии с постоянной по величине скоростью  $\mathbf{v}$  (рис. 2.10). При этом ее движение складывается из равномерного прямолинейного движения вдоль направления  $\mathbf{B}$  и равномерного вращательного движения в плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{B}$ . Проекция траектории движения частицы на плоскость, перпендикулярную  $\mathbf{B}$ , представляет собой окружность. Ось винтовой линии совпадает с направлением  $\mathbf{B}$ , и центр окружности перемещается вдоль силовой линии поля.

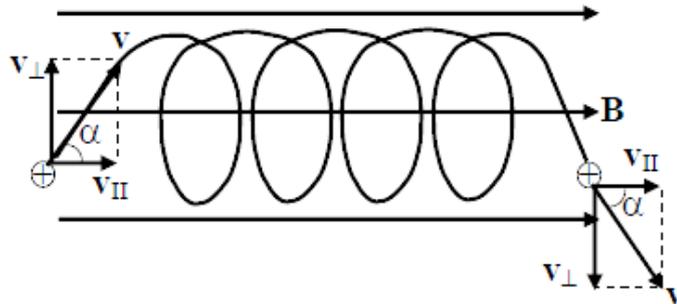


Рисунок 2.10 Заряженная частица в однородном постоянном магнитном поле

Электрическая составляющая электромагнитного поля действует на движущиеся электрические заряды с силой

$$F_e = qE$$

Формула (2.8) является важнейшим соотношением электродинамики, так как позволяет связать уравнения электромагнитного поля с уравнениями движения заряженных частиц.

Закон, отображаемый формулой (2.8), справедлив не только для постоянных, но и переменных магнитных полей, и притом для любых значений скорости  $\mathbf{v}$ . На покоящийся электрический заряд магнитное поле не действует. Кроме того, эта сила не совершает работы, а лишь искривляет траекторию движения частицы, не изменяет ее энергию.

Если  $\mathbf{E} \neq 0$ , то движение заряженной частицы в магнитном поле носит более сложный характер. Происходит перемещение центра вращения частицы перпендикулярно полю  $\mathbf{H}$ , называемое дрейфом частицы. Направление дрейфа определяется вектором  $[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$  и не зависит от знака заряда.

Воздействие магнитного поля на движущиеся заряды приводит к перераспределению тока по сечению проводника, что проявляется в различных термомагнитных и гальваномагнитных явлениях (эффект Холла; эффект Нернста-Эттингсхаузена).

Рассмотрим действие магнитного поля на проводники, в которых существуют токи, т.е. когда в движение вовлекаются не отдельные заряды, а очень много заряженных частиц.

Например, допустим, что ток создается движением одинаковых частиц с зарядом «e» и концентрацией  $n$ . Тогда  $\mathbf{j} = n \cdot e \cdot \mathbf{v}$ . Число частиц в объеме  $dV$  будет  $dN = n \cdot dV$ , а сила, действующая в магнитном поле на элемент объема  $dV$ ,

$$d\vec{F}_m = q[\vec{v} \times \vec{B}] \cdot dN$$

или

$$d\vec{F}_m = q[\vec{v} \times \vec{B}] \cdot dV = [\mathbf{j} \times \vec{B}] \cdot dV.$$

Это выражение справедливо и в общем случае, когда носителями тока являются разные заряды. Для частного случая, когда ток  $I$  течет вдоль бесконечно тонкого провода с площадью сечения

$S$ ,

$$dV = S \cdot d\ell, \mathbf{j} \cdot dV = \mathbf{j}S \cdot d\ell,$$

или

$$\vec{j} \cdot dV = I \cdot d\vec{\ell},$$

где  $d\vec{\ell}$  – вектор, направление которого совпадает с направлением тока;

$\vec{j} \cdot dV$  - объемный вектор;

$I \cdot d\vec{\ell}$  - линейный элемент тока.

В этом случае на бесконечно короткий участок провода длиной  $d\ell$  действует сила

$$d\vec{F} = I[d\vec{\ell} \times \vec{B}]. \quad (2.9)$$

Формула (2.9), определяющая силу, действующую в магнитно поле на линейный элемент тока, была установлена Ампером и носит название закона Ампера.

Силу, действующую на провод конечной длины, можно определить интегрированием (2.9) по всей длине провода:

$$\vec{F} = \int_{\ell} I[d\vec{\ell} \times \vec{B}] = \int_{\ell} I[d\vec{\ell} \times \vec{B}].$$

Силы, действующие на токи в магнитном поле, называют силами Ампера.

Величина силы, действующей со стороны однородного магнитного поля на прямолинейный проводник с током, пропорциональна силе тока в проводнике, длине проводника, индукции магнитного поля и синусу угла  $\alpha$  между направлением тока в проводнике и вектором  $\mathbf{B}$

$$F = IB\ell \cdot \sin\alpha.$$

В случае неоднородного поля и проводника произвольной формы

$$dF = IB \cdot d\ell \cdot \sin\alpha. \quad (2.10)$$

Из формулы (2.10), если проводник перпендикулярен вектору  $\mathbf{B}$ , имеем

$$B = \frac{F}{I\ell}.$$

Откуда при  $|\ell| = 1$  и  $|I| = 1$

$$|\mathbf{B}| = |\mathbf{F}|,$$

т.е. индукция магнитного поля численно равна силе, действующей со стороны поля на единицу длины проводника, в котором существует ток, равный единице, перпендикулярный к направлению магнитного поля.

Отсюда, действительно, индукция магнитного поля является его силовой характеристикой.

Силы Ампера не являются центральными, так как они перпендикулярны силовым линиям магнитного поля.

Рассмотрим два параллельных проводника 1 и 2 (рис. 2.11). По первому протекает ток  $I_1$ , по второму -  $I_2$  в одинаковом направлении. Вследствие магнитного взаимодействия проводники будут притягиваться. На проводник 2 в магнитном поле первого проводника действует сила Ампера (имеется в виду сила, действующая на отрезок проводника длиной  $\ell_2$ . На бесконечный проводник будет действовать бесконечно большая сила):

$$F_{21} = I_2 \ell_2 B_1 \cdot \sin\alpha = I_2 \ell_2 \mu_0 \mu \frac{I_1}{2\pi r}.$$

На единицу длины проводника будет действовать сила, выражаемая формулой

$$f_{21} = \frac{F_{21}}{\ell_2} = \mu_0 \mu \frac{I_1 I_2}{2\pi r}.$$

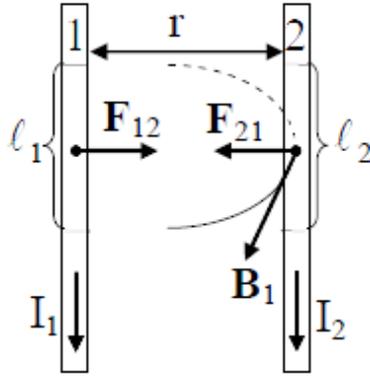


Рисунок 2.11 Два параллельных проводника с токами

Согласно третьему закону Ньютона на единицу длины первого проводника действует такая же по величине и противоположно направленная сила ( $\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$ ). Если же токи в проводниках антипараллельны, то возникающие силы - силы отталкивания.

Взаимодействие проводников с током наблюдается в действительности. Так, например, в результате взаимодействия токов витки катушки, по которой протекает переменный ток, периодически притягиваются друг к другу. При погружении в жидкую среду такая катушка излучает звуковые колебания.

### 2.5 Циркуляция индукции магнитного поля. Вихревой характер магнитного поля.

Циркуляцией вектора напряженности магнитного поля по замкнутому контуру L (или просто циркуляцией вектора напряженности магнитного поля) называют интеграл

$$\oint_L H \cdot \cos\theta \cdot d\ell = \oint_L \vec{H} \cdot \vec{d\ell} = \oint_L H_\ell \cdot d\ell$$

Из закона Био-Савара-Лапласа и принципа суперпозиции магнитных полей как экспериментальных факторов вытекает важное следствие, которое облегчает расчеты магнитных полей. Для установления этого следствия проведем в магнитном поле некоторую замкнутую линию L (контур произвольной формы и произвольных размеров) (рис. 2.12). Разобьем ее на элементарные участки  $d\ell$ . Для каждого из участков составим произведение  $H \cos\theta \cdot d\ell$ , где  $\theta$  - угол между направлением  $\mathbf{H}$  и касательной к контуру. Проинтегрировав, получим

$$\oint_L \vec{H} \cdot \vec{d\ell} = \oint_L H \cdot \cos\theta \cdot d\ell = \oint_L H_\ell \cdot d\ell = H\ell$$

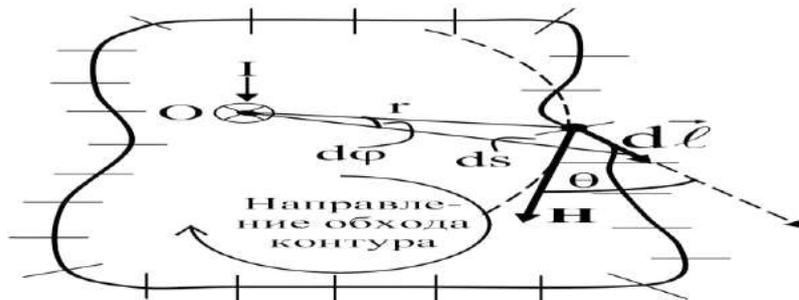


Рисунок 2.12 Циркуляция индукции магнитного поля

С учетом того что напряженность магнитного поля от бесконечно длинного проводника с током  $H = \frac{I}{2\pi r}$ , а  $\ell = 2\pi r$ , имеем

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \frac{I}{2\pi r} 2\pi r = I$$

Таким образом,

$$\oint_L H_\ell \cdot d\ell = I.$$

При изменении направления тока в проводнике в каждой точке поля вектор  $\vec{H}$  изменит свое направление на обратное. Косинусы углов  $\theta$  будут иметь противоположный знак, и интеграл будет отрицательным. Знак интеграла изменится также и при перемене направления обхода контура  $L$ , вследствие чего изменятся направления касательных. Ввиду этого направление обхода и направление тока должны быть связаны между собой правилом «правого винта».

Если внутри замкнутого контура находятся  $n$  токов, то

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \oint_L H \cdot \cos\theta \cdot d\ell = \oint_L H_\ell \cdot d\ell = \sum_{i=1}^n I_i. \quad (2.11)$$

Если ток протекает вне контура (рис. 2.13), то в этом случае можно записать

$$\begin{aligned} \oint_L H_\ell \cdot d\ell &= \int_{ABC} H_\ell \cdot d\ell + \int_{CDA} H_\ell \cdot d\ell = \frac{I}{2\pi r} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi + \frac{I}{2\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = \\ &= \frac{I}{2\pi} \left( \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \right) = 0 \end{aligned}$$

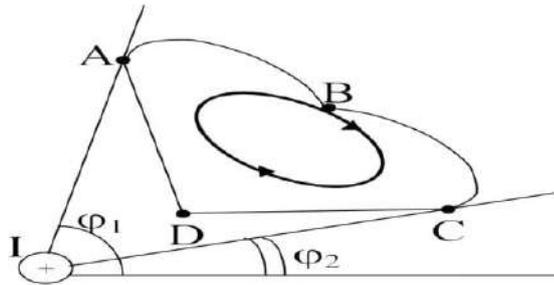


Рисунок 2.13 Ток протекает вне контура

Соотношение  $\oint_L H_\ell \cdot d\ell = -I$  справедливо и в том случае, когда контур и проводник имеют произвольную форму. Если ток направлен «на нас», то вектор  $\vec{H}$  направлен «против часовой стрелки» (рис. 2.14). В этом случае  $\theta > \pi/2$  и  $\cos \theta \cdot dl < 0$ . В результате получим  $\oint_L H_\ell \cdot d\ell = -I$

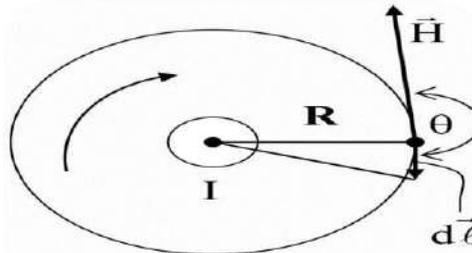


Рисунок 2.14 Ток направлен «на нас»

Если же контур охватывает  $n$  проводников с токами, направленными в разные стороны, то, учитывая, что от положения проводника внутри контура не зависит циркуляция  $\vec{H}$ , можем мысленно собрать все проводники в «жгут», толщина которого в силу конечности  $n$  мала. По «жгуту» протекает ток, равный алгебраической сумме токов отдельных проводников (рис. 2.15).

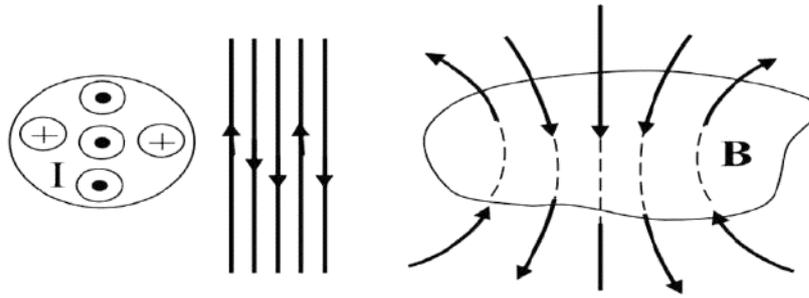


Рисунок 2.15 n проводников с токами, направленными в разные стороны

Утверждение (2.11), что циркуляция вектора напряженности магнитного поля по замкнутому контуру  $L$  равна алгебраической сумме токов, охватываемых контуром, называется теоремой о циркуляции магнитного поля или законом полного тока в интегральной форме. Таким образом, из закона полного тока вытекают следующие следствия:

а) если направление обхода контура и направление тока в проводнике не связаны между собой правилом правого винта, то значение

$$\oint_L H \cdot \cos\beta \cdot dl = \oint_L \vec{H} \cdot \vec{dl} = \oint_L H_l \cdot dl$$

сохранив величину, изменит знак;

б) если контур, расположенный в магнитном поле, не охватывает ток или алгебраическая сумма токов внутри замкнутого контура равна нулю, то

$$\oint_L H \cdot \cos\beta \cdot dl = \oint_L \vec{H} \cdot \vec{dl} = \oint_L H_l \cdot dl = 0.$$

Зная связь между вектором напряженности  $\vec{H}$  и вектором индукции  $\vec{B}$  магнитного поля, можно записать закон полного тока в интегральной форме для циркуляции вектора индукции:

$$\oint_L B \cdot \cos\beta \cdot dl = \oint_L \vec{B} \cdot \vec{dl} = \oint_L B_l \cdot dl = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i \quad (2.12)$$

Так как

$$\oint_L \vec{H} \cdot \vec{dl} = \oint_L H_l \cdot dl \neq 0, \quad \oint_L \vec{B} \cdot \vec{dl} = \oint_L B_l \cdot dl \neq 0,$$

то магнитному полю нельзя приписать какой-либо потенциал, а это означает, что магнитное поле является вихревым, а не потенциальным.

Закон полного тока в виде (2.11) и (2.12) для вакуума в стационарном случае является непосредственным следствием закона Био-Савара-Лапласа и может быть проверен экспериментально. Этот закон был выведен для тока, текущего по прямому, бесконечно длинному проводу.

Оказывается, что закон полного тока справедлив для произвольных токов и контуров (например, такого, который показан на рис. 2.5).

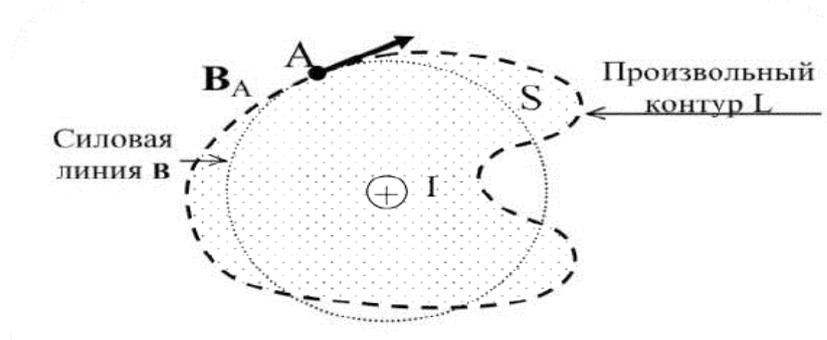


Рисунок 2.16 Произвольный контур

Для доказательства данного утверждения необходимо получить его в дифференциальной форме.

Отметим, что для вычисления силы полного тока можно выбрать любую поверхность  $S$ , ограниченную замкнутым контуром  $L$ . Уравнение (2.12) было получено исходя из закона Кулона, принципа суперпозиции электрических полей, инвариантности заряда и формул теории относительности. Можно показать, что закон Био-Савара-Лапласа можно получить из уравнения (2.12) как решение этого уравнения в случае отсутствия токов на бесконечности.

## 2.6 Применение закона полного тока для расчета магнитных полей

### Напряженность поля бесконечно длинного соленоида

Соленоидом называют катушку цилиндрической формы из провода, витки которой намотаны в одном направлении и прилегают плотно друг к другу.

Магнитное поле соленоида представляет собой результат сложения полей, создаваемых несколькими круговыми токами, расположенными рядом и имеющими общую ось (рис. 2.17).

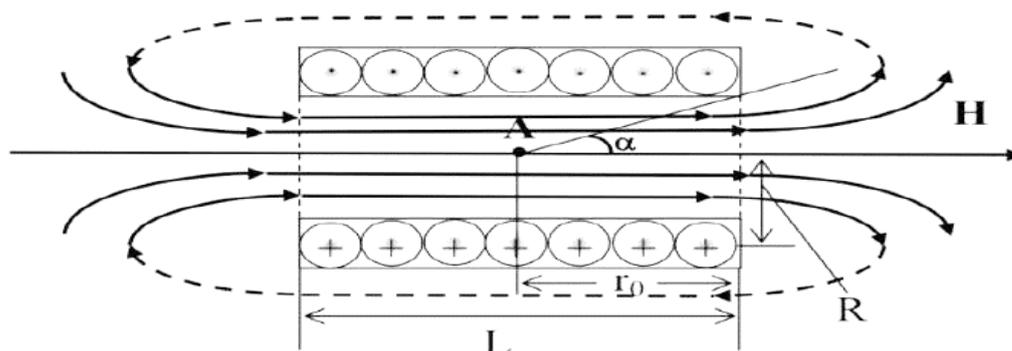


Рисунок 2.17 Магнитное поле соленоида

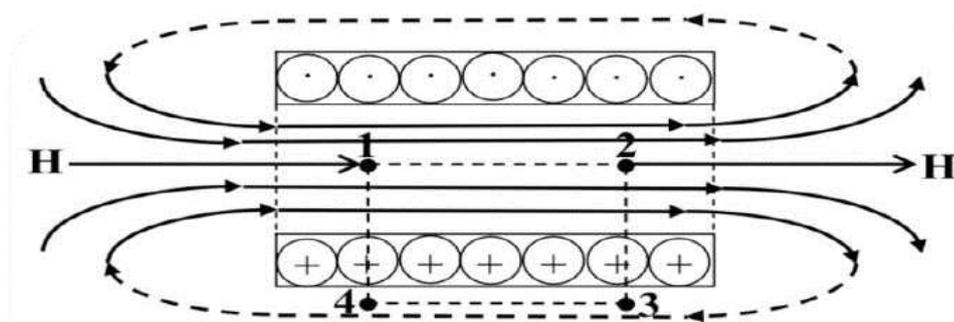
Внутри соленоида силовые линии каждого отдельного витка имеют одинаковое направление. Поэтому принято считать поле бесконечно длинного соленоида (такого, у которого диаметр гораздо меньше длины –  $d \ll L$ ) однородным, существующим только внутри его.

Рассчитаем напряженность магнитного поля внутри соленоида, длина которого  $L$ , радиус витка  $R$ , число витков  $N$ , сила тока  $I$ . Будем считать, что в любой точке соленоида вектор  $\mathbf{H}$  направлен параллельно оси.

Для расчета напряженности воспользуемся законом полного тока в виде

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot \cos\beta \cdot d\ell = \oint_L \vec{H} \cdot \vec{d\ell} = \oint_L H_\ell \cdot d\ell = \sum_{i=1}^n I_i \quad (2.13)$$

Выберем замкнутый контур прямоугольной формы, участок 1-2 которого расположен внутри соленоида вдоль его оси. Левую часть выражения (2.13) можно представить в виде



$$\oint_L H_\ell \cdot d\ell = \int_1^2 H_\ell \cdot d\ell = \int_2^3 H_\ell \cdot d\ell = \int_3^4 H_\ell \cdot d\ell = \int_4^1 H_\ell \cdot d\ell$$

где  $\int_2^3 H_\ell \cdot d\ell = 0$ , так как  $\mathbf{H}$  перпендикулярен участку 2-3;  
 $\int_4^1 H_\ell \cdot d\ell = 0$ , так как  $\mathbf{H}$  перпендикулярен участку 4-1;  
 $\int_4^4 H_\ell \cdot d\ell = 0$ , так как участок 3-4 находится вне соленоида.  
 Следовательно,

$$\oint_L H_\ell \cdot d\ell = \int_1^2 H_\ell \cdot d\ell = H\ell$$

Правая часть выражения (2.13) может быть представлена так:

$$\sum_{i=1}^n I_i = n\ell I$$

где  $n$  - число витков на единице длины соленоида;

$\ell$  - длина участка;

$I$  - величина тока в соленоиде.

Таким образом, имеем

$$H\ell = n\ell I$$

Откуда

$$H = nI.$$

Полученная формула согласуется с формулой, полученной с применением закона Био-Савара-Лапласа.

Из полученного результата действительно видно, что напряженность магнитного поля внутри бесконечно длинного соленоида имеет одно и тоже значение, а следовательно, оно действительно однородно.

Таким образом, действительно внутри бесконечно длинного соленоида напряженность магнитного поля практически везде одинакова. Она направлена вдоль оси соленоида в соответствии с правилом правого винта.

#### Напряженность магнитного поля тороида

Магнитное поле тороида (тороид – это соленоид, свитый в кольцо) однородное, сосредоточено внутри самого тороида. Вне тороида поле отсутствует. Линии вектора  $\mathbf{H}$  представляют собой концентрические окружности, центры которых совпадают с центром тороида.

Краевой эффект у тороида (такого соленоида) отсутствует (рис. 2.8).

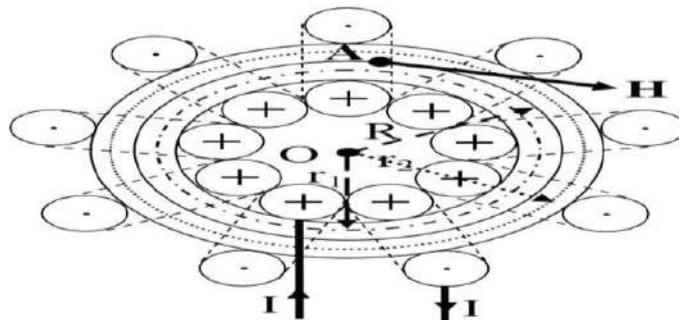


Рисунок 2.17 Напряженность магнитного поля тороида

Выбирая одну из линий вектора  $\mathbf{H}$  за контур обхода, радиус которого  $r$  ( $r_1, r_2$ ), и применяя закон полного тока, будем иметь

$$\oint_L H_\ell \cdot d\ell = H\ell = H2\pi r;$$

$$\sum_{i=1}^n I_i = n2\pi R I$$

где  $R$  - радиус тороида (радиус линии вектора  $\mathbf{H}$ , расположенной в средней части тороида).

Имеем

$$H2\pi r = n2\pi R I,$$

Откуда

$$H = nI \frac{R}{r}$$

Так как в нашем случае  $R = r$ , то  $H = nI$ .

Внутри тороида напряженность магнитного поля имеет различные направления, поэтому говорить о его однородности можно только условно, т.е.

$$H = nI = const.$$

**Напряженность магнитного поля внутри толстых проводников с током.** Пусть ток с постоянной плотностью протекает по проводнику радиуса  $R_0$  (рис. 2.18). Вне проводника, согласно теореме о циркуляции вектора напряженности магнитного поля  $\vec{H}$ ,

$$\oint H_\ell \cdot d\ell = I$$

где  $L$ - контур, представляющий собой окружность радиуса  $R$ , центр которой лежит на оси цилиндрического проводника.

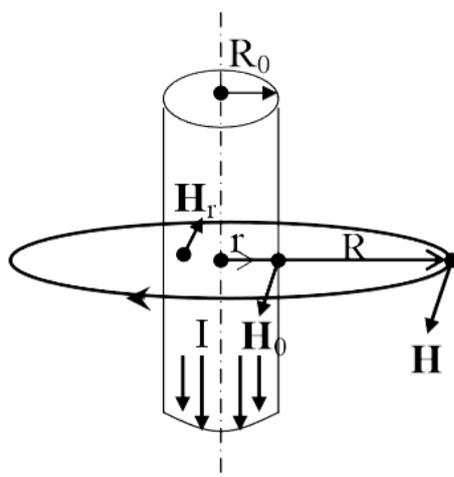


Рисунок 2.18 Напряженность магнитного поля внутри толстых проводников с током

Имеем

$$H \cdot \oint_L d\ell = I \text{ или } H 2\pi R = I; H = \frac{I}{2\pi R}$$

Величина тока

$$I = j\pi R_0^2$$

где  $j$ - плотность тока.

Тогда

$$H = j \frac{R_0^2}{2R}$$

Анализ полученного соотношения показывает:

1. Если расстояние от оси проводника меньше его радиуса ( $r < R_0$ ), то

$$H = j \frac{r}{2}$$

Напряженность магнитного поля линейно возрастает.

2. Если расстояние от оси проводника равно его радиусу, то

$$H_0 = \frac{R_0}{2} j$$

Напряженность магнитного поля достигает максимального значения.

3. Если расстояние от оси проводника больше его радиуса ( $r > R_0$ ), то

$$H = j \frac{R_0^2}{2R}.$$

Напряженность магнитного поля убывает и при  $R \rightarrow \infty$  равна нулю.

Графически изменение напряженности магнитного поля проводника от расстояния до его оси можно представить так, как показано на рис. 2.19.

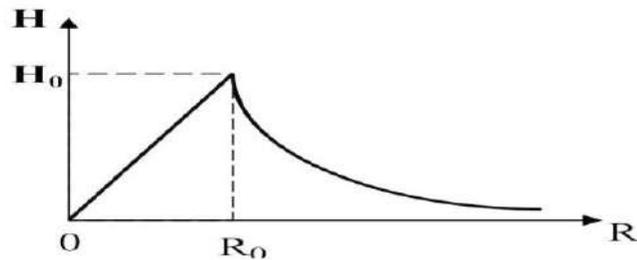
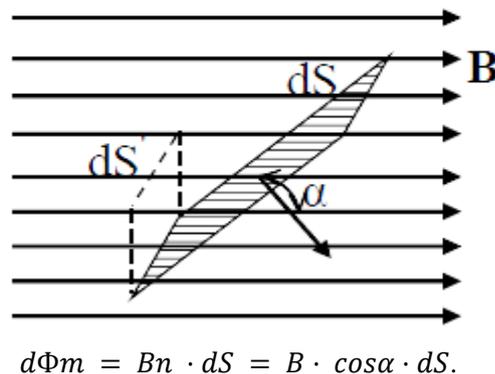


Рисунок 2.19 Зависимость напряженности магнитного поля от радиуса

## 2.7 Магнитный поток. Магнитные цепи

По аналогии с понятием потока вектора напряженности электрического поля ( $\Phi_{\vec{E}} = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$ ) вводится понятие потока вектора индукции магнитного поля.

Потоком магнитной индукции или магнитным потоком через площадку  $dS$  называется физическая величина, численно равная произведению проекции вектора индукции магнитного поля  $\mathbf{B}$  на направление положительной нормали  $\mathbf{n}$  к площадке и величины площадки  $dS$  ( $d\Phi_m = dS \cdot \cos\alpha$ ):



Полный поток магнитной индукции через некоторую поверхность  $S$

$$\Phi_m = \int B_n \cdot dS.$$

Если магнитное поле однородное и площадь  $S$  плоская,

$$\Phi_m = BnS.$$

Так как в природе магнитные заряды не существуют и линии вектора  $\mathbf{B}$  любого магнитного поля замкнуты, то теорема Остроградского-Гаусса для магнитных полей имеет вид

$$\oint_S B_n dS = \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

Данное уравнение является одним из уравнений Максвелла.

Введение понятия «магнитный поток» позволяет рассчитывать магнитные цепи, содержащие элементы с различными сечениями и магнитными проницаемостями. Рассмотрим магнитную цепь, состоящую из тороида с узким воздушным (вакуумным) зазором (рис. 2.20). На рис. 2.20 изображен только сердечник тороида. Выбрана некоторая точка «А», расположенная на расстоянии, равном радиусу средней линии тороида. Выбрано направление вектора напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$ .

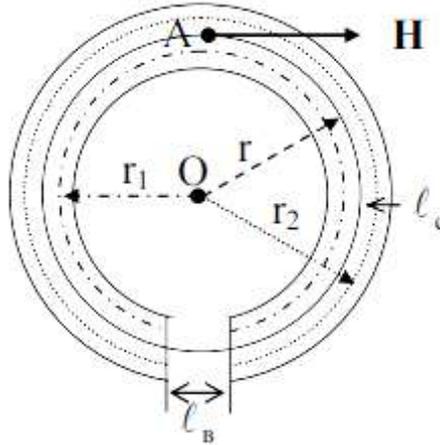


Рисунок 2.20 Тороида с узким воздушным

На основании закона полного тока для средней линии  $l$ , часть которой проходит внутри сердечника  $l_c$ , а часть в зазоре  $l_B$ , имеем

$$\oint_L H_l dl = IN \quad ,$$

где  $N$  - число витков обмотки тороида.

В рассматриваемом случае

$$\oint_L H_l dl = \int_{l_c} H_{l_c} dl + \int_{l_B} H_{l_B} dl = H_c l_c + H_B l_B.$$

С учетом того что  $H_c = \frac{B}{\mu_0 \mu_c}$ , а  $H_B = \frac{B}{\mu_0 \mu_B}$ , закон полного тока можно записать так:

$$\oint_L H_l dl = \frac{B}{\mu_0 \mu_c} l_c + \frac{B}{\mu_0 \mu_B} l_B = B \left( \frac{l_c}{\mu_0 \mu_c} + \frac{l_B}{\mu_0 \mu_B} \right) = IN.$$

Из этой формулы для численного значения вектора индукции магнитного поля  $\mathbf{B}$  имеем

$$B = \frac{IN}{\frac{l_c}{\mu_0 \mu_c} + \frac{l_B}{\mu_0 \mu_B}} \quad (2.14)$$

Если воздушный зазор заменен материалом сердечника, то

$$B' = \frac{IN}{\frac{l_c}{\mu_0 \mu_c} + \frac{l_B}{\mu_0 \mu_B}} \quad (2.15)$$

Из сопоставления формул (2.14) и (2.15) видно, что так как  $\mu_c \gg \mu_B$ , то  $B' > B$ , т.е. наличие зазора ослабляет магнитное поле в сердечнике.

Умножим обе части равенства (2.14) на площадь поперечного сечения сердечника  $S$ , получим

$$BS = \Phi_m = \frac{IN}{\frac{l_c}{\mu_0 \mu_c S} + \frac{l_B}{\mu_0 \mu_B S}} \quad (2.16)$$

где  $IN = E_M$  - магнитодвижущая сила;

$R_{MC} = \frac{1}{\mu_0 \mu_c S} l_c$  - магнитное сопротивление цепи сердечника;

$R_{MB} = \frac{1}{\mu_0 \mu_B S} l_B$  - магнитное сопротивление цепи воздушного зазора;

Выражение (2.16) отображает закон Ома для магнитных цепей. Таким образом,

$$\Phi_m = \frac{E_M}{R_M} = \frac{E_M}{R_{MC} + R_{MB}};$$

где  $R_M = R_{MC} + R_{MB}$  - полное сопротивление магнитной цепи.

Можно показать, что для расчета разветвленных магнитных цепей справедливы законы Кирхгофа, которые аналогичны законам Кирхгофа для цепей постоянного тока. Внизу на рис. 21 (а и б) представлены магнитная цепь с разветвлением магнитного потока и аналогичная ей электрическая цепь соответственно.

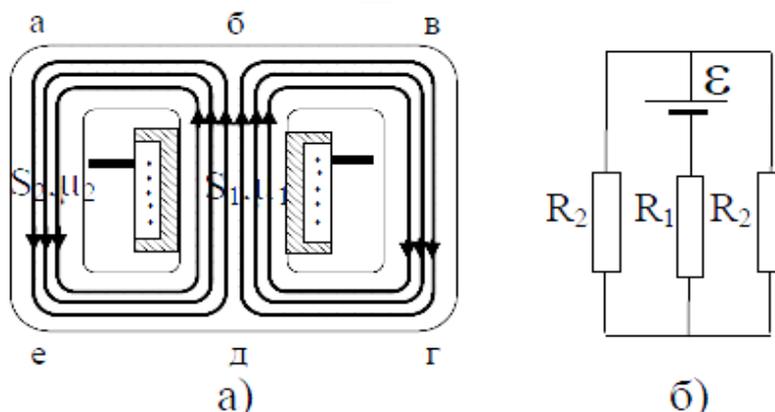


Рисунок 2.21

Первый закон Кирхгофа для магнитных цепей утверждает: «Алгебраическая сумма магнитных потоков в участках цепи сходящихся в узле равна нулю», т.е.

$$\sum_{i=1}^n \Phi_{Mi} = 0.$$

Знак магнитного потока  $\Phi_{Mi}$  определяется направлением соответствующих линий  $\mathbf{B}$ . Если линии вектора  $\mathbf{B}$  сходятся в узле, то  $\Phi_{Mi}$  – положителен; если они выходят из узла, то магнитный поток  $\Phi_{Mi}$  – отрицателен.

Второй закон Кирхгофа для магнитных цепей формулируется так: «В любом замкнутом магнитном контуре, произвольно выбранном в разветвленной магнитной цепи, алгебраическая сумма произведений магнитных потоков на магнитное сопротивление соответствующих участков цепи, равна алгебраической сумме магнитодвижущих сил этого контура», т.е.

$$\sum_{i=1}^n \Phi_{Mi} R_{Mi} = \sum_{i=1}^n E_{Mi}.$$

На рис. 2.22 показано разветвление магнитного потока (вид одного из возможных узлов магнитной цепи).

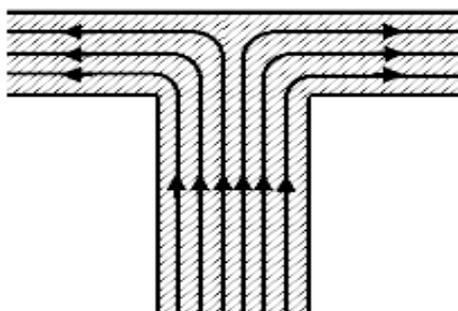


Рисунок 2.22 Разветвление магнитного потока

Из законов Кирхгофа вытекают законы последовательного и параллельного соединений участков магнитной цепи. Так, в частности, можно утверждать, что при последовательном соединении магнитопроводов полное магнитное сопротивление равно сумме магнитных сопротивлений отдельных последовательно соединенных участков:

$$R_M = \sum_{i=1}^n R_{Mi}.$$

При параллельном соединении обратная величина сопротивления разветвленной части магнитной цепи равна сумме обратных величин магнитных сопротивлений отдельных ветвей:

$$\frac{1}{R_M} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_{Mi}}$$

В отдельных случаях представляется удобным в процессе решения задачи временно заменить схему магнитопровода соответственно электрической схемой, а затем решение задачи, отвечающей электрической схеме, перенести на магнитную схему. Однако, пользуясь аналогиями, не следует забывать об особенностях явлений:

а) в то время как проводимость металла превосходит проводимость диэлектриков в миллиарды миллиардов раз, магнитная проницаемость железа, например, больше магнитной проницаемости воздуха лишь в сотни или тысячи раз. При расчете магнитных цепей нельзя пренебрегать «магнитными утечками» или «магнитным рассеянием», т.е. с магнитными потоками, проходящими не по ферромагнитному магнитопроводу, а по окружающей его среде, в то время как при расчете электрических цепей в большинстве случаев можно пренебречь проводимостью окружающей среды. Особенно значительное магнитное рассеяние наблюдается в местах резких изгибов, у острых углов магнитопроводов, у вогнутостей, выточек и трещин, у тонких и длинных участков, особенно лишенных обмоток. Все это осложняет расчеты магнитных цепей и делает их менее точными, чем расчеты электрических цепей;

б) своеобразие задачи на магнитные цепи заключается также и в том, что в то время как удельная проводимость металлов и электролитов не зависит от плотности тока, магнитная проницаемость ферромагнетиков не является однозначной функцией напряженности поля  $\mathbf{H}$  или индукции  $\mathbf{B}$ . Кроме того, она является такой функцией, для которой не найдено аналитическое выражение. Это тоже значительно осложняет расчет магнитных цепей и принуждает пользоваться, наряду с формулами, также и графиками, в частности кривыми намагничивания.

На свойствах магнитных цепей основана так называемая «магнитная защита». Если в магнитное поле поместить толстостенный сосуд или кожух из ферромагнетика с большим значением  $\mu$ , то магнитный поток пройдет преимущественно в толще ферромагнитных стенок, магнитное же поле внутри пространства, ограниченного ферромагнетиком, будет ослаблено. Ферромагнитные чехлы и перегородки, служащие для ослабления магнитного поля внутри них, и являются магнитной защитой, применяемой при устройстве различного рода приборов.

На свойствах магнитных цепей основан так называемый магнитный анализ изделий, применяемый для обнаружения скрытых поверхностных дефектов деталей машин и других изделий из ферромагнитных материалов. Метод основан на том, что магнитный поток, проходящий по намагниченной детали и пересекающий трещину или иной порок, встречает большое магнитное сопротивление. В этом случае силовые линии магнитного поля, искривляясь, выходят на поверхность, образуя на краях дефекта полюсность, которая легко обнаруживается по «прилипанию» в этих местах тонкого магнитного порошка (магнитной жидкости). Таким образом, узоры из приставшего к поверхности изделия ферромагнитного порошка указывают месторасположение трещин и других дефектов.

## 2.8 Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле

Вычислим работу, которую совершают силы, действующие на проводник с током по его перемещению в магнитном поле.

Известно, что на проводник с током, помещенный в магнитное поле, действует сила. В результате проводник может изменить свое первоначальное положение, например переместиться на расстояние  $dx$  как показано на рисунке 2.23. В этом случае элементарная работа, совершаемая действующей силой, будет равна:

$$dA = dF \cdot dx \cdot \cos\alpha,$$

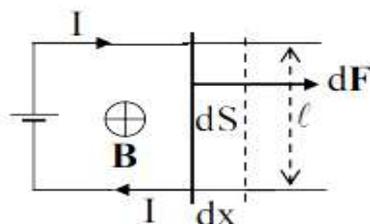


Рисунок 2.23

где  $dF$  - элементарная сила, действующая со стороны магнитного поля на проводник с током;  
 $dx$  - элементарное перемещение;

$\alpha$  - угол между направлением перемещения и направлением силы.

Так как в рассматриваемом случае направление силы и перемещения совпадают, то  $\cos\alpha = 1$ , следовательно,

$$dA = dF \cdot dx.$$

На основании закона Ампера

$$dF = IB \cdot \sin\beta \cdot dl,$$

где  $I$  - величина тока в проводнике;

$B$  - численное значение индукции магнитного поля;

$dl$  - элемент проводника;

$\beta$  - угол между направлением тока в проводнике и направлением положительной нормали к оси проводника.

Тогда

$$dA = IB \cdot \sin\beta \cdot dl \cdot dx,$$

где  $dl \cdot dx = dS$  - площадь, описываемая элементом проводника  $dA$  при его перемещении;

$B \cdot \sin\beta = B_n$  - проекция вектора  $B$  на направление положительной нормали  $n$ ;

$B_n \cdot dS = d\Phi_M$  - элементарный магнитный поток пронизывающий  $dS$ .

Таким образом, имеем

$$dA = I \cdot d\Phi_M.$$

Следовательно, работа, совершаемая силами Ампера по перемещению в магнитном поле проводника с током, равна произведению силы тока на величину магнитного потока через поверхность, которую описывает проводник при своем движении.

Если ток постоянен и проводник прямолинейный,

$$A = I\Phi_M. \quad (2.17)$$

Рассчитаем работу при вращательном движении проводника с током в магнитном поле.

Пусть элемент проводника  $dl$  с током поворачивается под действием магнитного поля на угол  $d\alpha$  (рис. 2.24). При этом он описывает площадку

$$dS = dl \cdot l \cdot d\alpha,$$

где  $l$  - расстояние элемента от оси вращения  $O$ .

Сила, действующая на элемент  $dl$  в направлении его перемещения,

$$dF = I \cdot dA \cdot B_n,$$

где  $B_n$  - составляющая индукции магнитного поля, перпендикулярная  $dS$ .

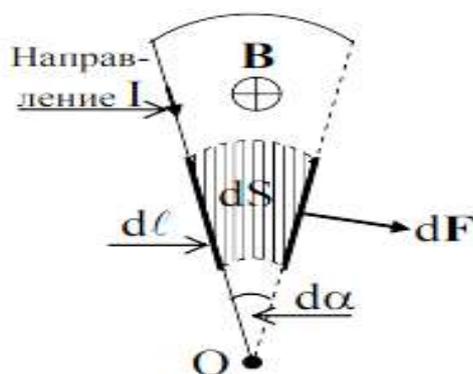


Рисунок 2.24 Поворот проводника в магнитном поле

Совершаемая этой силой работа

$$dA = I \cdot dl \cdot B l \cdot d\alpha = IB \cdot dS = I \cdot d\Phi_M. \quad (2.18)$$

Сравнивая соотношения (2.17) и (2.18), убеждаемся в том, что работа по перемещению проводника с током в магнитном поле не зависит от вида движения проводника.

Можно показать, что работа, совершаемая силами Ампера при перемещении в магнитном поле контура с током, равна произведению силы тока на изменение магнитного потока через поверхность, ограниченную контуром:

$$dA = I \cdot d\Phi_M.$$

где  $I$  - величина тока в контуре;

$d\Phi_M$  - изменение магнитного потока.

Если перемещаемый контур состоит из  $N$  витков, то

$$dA = \sum_{i=1}^N dA_i = \sum_{i=1}^N I \cdot d \left( \sum_{i=1}^N \Phi_{M_i} \right) = I \cdot d\Psi,$$

где  $\Psi = \sum_{i=1}^N \Phi_{M_i}$  - потокосцепление или полный магнитный поток, пронизывающий  $N$  витков контура.

### Вопросы для контроля знаний

1. Магнитное поле в вакууме и его характеристики.
2. Магнитное поле и магнитный момент кругового тока.
3. Принцип суперпозиции магнитных полей.
4. Закон Био-Савара-Лапласа.
5. Применение закона Био-Савара-Лапласа к расчету магнитных полей прямолинейного и кругового токов.
6. Магнитное взаимодействие токов.
7. Силы Лоренца и Ампера.
8. Циркуляция индукции магнитного поля.
9. Вихревой характер магнитного поля.
10. Теорема о циркуляции индукции магнитного поля (закон полного тока для магнитного поля) в вакууме.
11. Применение закона полного тока для расчета магнитных полей.
12. Магнитный поток.
13. Магнитные цепи.
14. Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле.

## Глава 3. ЭФФЕКТ ЗЕЕМАНА. МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОНА

### 3.1 Эффект Зеемана: простой (нормальный) и сложный (аномальный)

Магнитные и электрические явления многообразны. В целом они являются следствием существования элементарных частиц и их свойств. Электрический заряд электрона и протона, как одна из важнейших характеристик, во многом определяет электрические и магнитные свойства атомов и вещества в целом. В атоме орбитальное движение электрона по законам и классической, и квантовой физики приводит к существованию у него орбитального магнитного момента, как характеристики замкнутых токов, что подтверждается экспериментально. Однако, исследование некоторых физических явлений, указывало на то, что электрон в атоме, кроме орбитального магнитного момента обладает собственным магнитным моментом. Одно из таких явлений - эффект Зеемана, который имеет большое значение в научных исследованиях, в том числе в исследовании космического пространства. Этот эффект, его роль в обнаружении собственного магнитного момента электрона рассмотрим подробнее.

Эффектом Зеемана в физике называют расщепление спектральных линий под действием внешнего магнитного поля, в котором находится излучающее или поглощающее вещество. Вместо одной линии, наблюдаемой при отсутствии магнитного поля, появляется несколько близкорасположенных линий. Эффект, наблюдаемый на линиях излучения, называется прямым. Эффект, наблюдаемый в спектрах поглощения, получил название обратного эффекта. Закономерности обратного эффекта аналогичны закономерностям прямого эффекта. Эффект был открыт нидерландским физиком П.Зееманом в 1896 году при лабораторных исследованиях свечения паров натрия. Излучение или поглощение происходят вследствие перехода электрона между энергетическими уровнями атома. Поэтому наблюдение расщепления спектральных линий на несколько компонентов в магнитном поле позволяет сделать вывод о том, что в магнитном поле происходит расщепление соответствующих энергетических уровней. Расщепление энергетических уровней атома в магнитном поле также называют эффектом Зеемана.

Под действием магнитного поля уровни энергии расщепляются на зеемановские подуровни. При переходах между подуровнями вместо одной спектральной линии появляется несколько поляризованных компонентов. Различают нормальный (простой) и аномальный (сложный) эффекты Зеемана. Для одиночных спектральных линий в направлении, перпендикулярном индукции

магнитного поля  $\vec{B}$  наблюдается зеемановский триплет. Это простой эффект Зеемана. Триплет – это три спектральных линии, одна из которых соответствует линии, наблюдаемой без магнитного поля; две другие – симметрично смещенные относительно нее в сторону большей и меньшей длин волн. В триплете несмещенная линия,  $\pi$ -компонента, поляризована в направлении магнитного поля, а две симметричные относительно нее  $\sigma$ -компоненты поляризованы перпендикулярно полю. Простой триплет наблюдается также на мультиплетах (тонкой структуре спектральных линий или энергетических уровней), но в сильных магнитных полях. В слабых магнитных полях на мультиплетах наблюдается более сложная картина расщепления. Появляется несколько равноотстоящих друг от друга  $\pi$ -компонент и две симметричные относительно них группы  $\sigma$ -компонент. Это аномальный или сложный эффект Зеемана. Чаще всего наблюдается именно такой сложный эффект.

Различают также продольный и поперечный эффект Зеемана. Поперечный эффект наблюдается в направлении перпендикулярном магнитному полю. Все компоненты спектральных линии поляризованы линейно: часть - параллельно полю ( $\pi$ -компоненты), часть – перпендикулярно полю ( $\sigma$ -компоненты). На рисунке 3.1 показано зеемановское расщепление двух близких спектральных линий атома натрия, жёлтого дублета (мультиплета)  $5890 \text{ \AA}$  и  $5896 \text{ \AA}$ . Картина расщепления зависит от направления наблюдения по отношению к направлению магнитного поля.

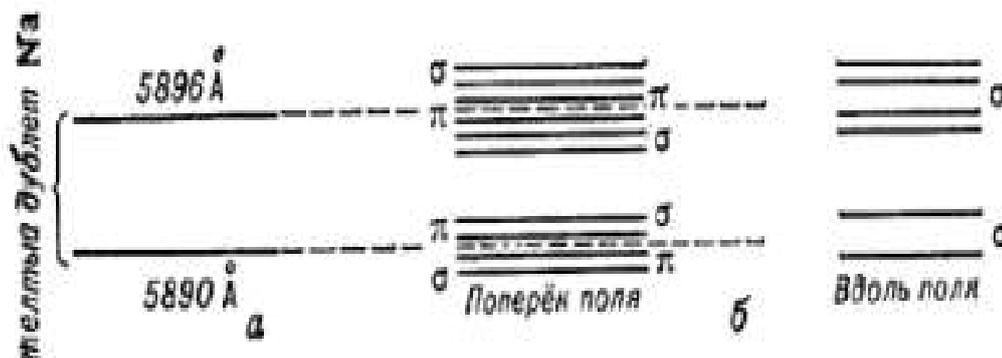


Рисунок 3.1 Картина расщепления двух близких спектральных линий атома натрия (желтого дублета натрия) в магнитном поле при наблюдении поперек и вдоль поля;  $\pi$ - и  $\sigma$  компоненты поляризованы различно

При наблюдении вдоль поля (продольный эффект Зеемана) остаются видимыми лишь  $\sigma$  - компоненты, однако линейная поляризация их сменяется круговой. Поляризация линий показана на рисунке 3.2.

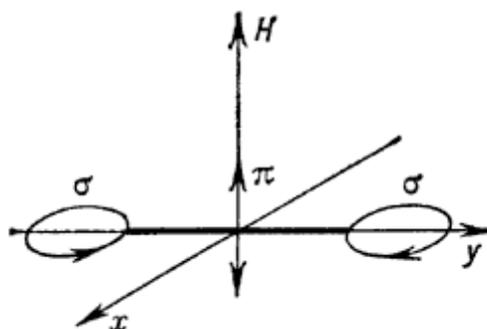


Рисунок 3.2 Поляризация  $\pi$ -компонентов (поперечный эффект Зеемана) и  $\sigma$ -компонентов (продольный эффект);  $\mathbf{H}$  – направление магнитного поля, плоскость  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ - плоскость поляризации  $\sigma$ -компонентов

Первое объяснение эффекта Зеемана было дано нидерландским физиком Х.Лоренцем в 1897 г. на основе классической теории. Он объяснил механизм нормального эффекта. Аномальный эффект в рамках классической физики объяснить не удалось. Это связано с тем, что, как выяснилось позднее, этот эффект связан с существованием спина электрона, а аналога спину в классической физике не существует. Полное объяснение эффект Зеемана получил на основе квантовой теории, из которой следует квантование механического момента электрона в атоме и соответствующего ему магнитного момента. Взаимодействие магнитного момента электрона с внешним полем изменяет энергию уровня в зависимости от их взаимной ориентации. Кратность расщепления определяется количеством возможных значений магнитного квантового числа.

Обнаружение эффекта Зеемана, понимание его механизма сыграли большую роль в развитии квантовой теории. Он нашел широкое применение в астрономии и других областях.

**Место эффекта Зеемана в квантовой теории. Спин электрона.** Из истории развития науки видно, что понимание одних фактов, построение теории, их объясняющей, приводит к появлению новых вопросов, не находящих объяснения в рамках построенной теории. В квантовой механике Резерфорда, Бора, Шредингера к таким вопросам привели результаты опытов по пространственному квантованию О.Штерна и В.Герлаха, обнаружение мультиплетной структуры спектров, а также сложный эффект Зеемана. Поиск ответа на эти вопросы привел к принципиально новому этапу в развитии квантовой физики. Таким этапом является введение собственного механического момента (спина) и соответствующего ему собственного магнитного момента, как внутренних характеристик электрона, аналогов которым нет в классической физике.

В учебном пособии идея о существовании спина рассматривается в следующей логике. Решается волновое уравнение Э.Шредингера для водородных атомов, то есть атомов водорода и ионов с одним электроном. Рассматривается движение частицы в центрально-симметричном поле. Это решение дает следующие результаты. Состояние электрона в атоме характеризуется энергией,

моментом импульса и его проекцией на произвольную ось  $z$ , с которой связан орбитальный магнитный момент. Спектры всех этих величин дискретны. Каждой из них соответствует свое квантовое число:

$n=0, 1, 2, \dots$  - главное квантовое число, определяет энергию;

$l=0, 1, 2, \dots, n-1$  - орбитальное число, определяет механический момент;

$m=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$  - магнитное квантовое число, определяет проекцию механического момента и орбитальный магнитный момент.

При подготовке материалов подробно рассматривалось движение заряженных частиц в центрально-симметричном поле с позиции квантовой механики (решение волнового уравнения Шредингера для электрона атома водорода и водородоподобных атомов). Результаты опубликованы в учебно-методическом пособии [11].

Энергия электрона в водородоподобном атоме зависит только от « $n$ », то есть энергетический спектр вырожден по  $l$  и  $m$ . Это означает, что состояниям с одинаковым значением  $n$ , но различными  $l$  и  $m$  соответствует одно значение энергии. Далее уравнение Шредингера решается для многоэлектронных атомов в модели оптического (валентного) электрона. С учетом не центрального характера поля получают зависимость энергии не только от главного квантового числа, но и от орбитального ( $E_{nl}$ ). Отсюда вывод: если количество электронов в атоме больше одного, то их кулоновское взаимодействие снимает вырождение по орбитальному числу  $l$ . Но остается вырождение по магнитному числу  $m$ . Если атом находится во внешнем магнитном поле, то вырождение по  $m$  снимается, то есть энергетические уровни расщепляются по значениям  $m$ . Это с учетом правила отбора  $\Delta m=0; \pm 1$  позволяет объяснить нормальный триплет Зеемана, который находил объяснение и в рамках классической физики.

Энергетический спектр  $E_{nl}$  позволяет, с учетом правил отбора, определить возможные спектральные линии излучения или поглощения. Но оказалось, что не все эти линии являются одиночными (синглетами). Многие линии при наблюдении в приборах с высокой разрешающей способностью оказываются расщепленными на несколько близко расположенных линий. Это мультиплетная (тонкая) структура линий (дублеты, триплеты, квартеты и так далее). Им должно соответствовать расщепление энергетических уровней, которое не следует из решения уравнения Шредингера даже с учетом кулоновского взаимодействия электронов между собой. Автор (Э.В. Шпольский) обращает внимание на то, что мультиплетная структура спектров была известна до создания квантовой механики, опирающейся на гипотезу де Бройля. Этот вопрос подробно рассмотрен и в работе М.Джеммера. Еще в 1920 году Паули ввел понятие магнетона Бора, как магнитного момента электрона, движущегося по самой малой орбите Бора в атоме водорода. Проблема аномального эффекта Зеемана тесно переплеталась с мультиплетной структурой спектральных линий. Эксперимент явно указывал на то, что сложный эффект Зеемана наблюдается только на мультиплетных, на синглетах – нормальный эффект Зеемана. (Термин «мультиплет» ввел М.А. Каталан для обозначения сложных термов). Тогда же было введено обозначение термов  $s, p, d, f, g$ . Мультиплетными Каталан назвал группу спектральных линий, возникающих при переходах между сплошными термами.

Интересно, что А.Ланде, анализируя зеемановское сложное расщепление, предположил, что оно соответствует гиромангнитному отношению вдвое меньшему, чем это должно быть для отношения орбитальных моментов магнитного к механическому. Гипотеза пространственного квантования была выдвинута А.Зоммерфельдом. И ее проверку экспериментально осуществили О.Штерн и В.Герлах в 1924 году, то есть до современной квантовой механики, начало которой относится к 1924 году (гипотеза де Бройля). К тому времени было квантование в оптике, и в теории Бора для атома. В атоме была принята оболочечная структура распределения электронов. Для объяснения мультиплетов надо было предположить, что термы  $s$ -одиночные, а термы  $p, d, f, g$  – двойные. Двойственность состояний следовала из опытов О. Штерна и В.Герлаха. В.Паули выдвинул гипотезу о том, что дублетная структура спектров щелочных элементов и сложный эффект Зеемана возникают вследствие дублетности квантовых свойств электрона, которую нельзя описать классически. Фактически гипотеза Планка сводилась к тому, что для описания электрона формально вводилось дополнительное квантовое число. Таким образом, невырожденное состояние должно характеризовать не три, а четыре квантовых числа. Паули не связывал свою идею ни с какой кинематической моделью, подчеркивая, что его идея не имеет классического аналога.

Существенный шаг в развитии идеи В.Паули сделали голландские физики Дж.Уленбек и С.Гаудсмит (1925 год), с именами которых связано введение спина как характеристики состояния вращающегося электрона. Здесь интересно отметить, что Дж.Уленбек и С.Гаудсмит не были

первыми, выдвинув идею вращающегося электрона для введения четвертой степени свободы. В то же время, но несколько раньше ее выдвигал Р.Кронинг (США). Он рассматривал роль спин-орбитальных взаимодействий в существовании мультиплетности. Р.Кронинг предложил модель сферического вращающегося электрона. При этом, вследствие наличия электрического заряда вращение должно создать магнитный момент, взаимодействующий с орбитальным магнитным моментом. Расчеты показали, что собственный внутренний механический момент электрона должен быть равным  $\frac{h}{4\pi}$

или  $\frac{1}{2}\hbar$ . Для обеспечения такого момента точки на поверхности электрона классического радиуса

должны вращаться со скоростью во много раз больше скорости света. Это создавало проблему. Р.Кронинг обсуждал идею с В.Паули, Крамрсом и В.Гейзенбергом, которые с идеей вращающегося электрона не согласились. От гипотезы вращающегося электрона отказались. Таким образом, Р.Кронинг был первым, кто использовал понятие спина и внутреннего магнитного момента электрона. Можно отметить, что идеи о наличии магнитных свойств у частицы выдвигались и до Р.Кронинга. Например, А.Комптон, изучая рассеяние рентгеновских лучей на поверхности кристаллов, сделал вывод о том, что внутри атома должна быть первичная магнитная частица, ею является электрон.

Дж.Уленбек и С.Гаудсмит пришли к введению четвертой степени свободы независимо от Р.Кронинга в связи с исследованиями В.Паули. Их идею поддержал Н.Бор. В.Паули согласился с идеей спина только в 1926 году. Его сомнения были связаны с тем, что спин интерпретировался как механическое вращение, то есть в рамках классической механики, а В.Паули считал, что четвертая степень свободы не имеет классического аналога. Позднее Н. Бор показал, что действительно спин следует рассматривать как существенно квантовомеханическое свойство электрона, не имеющее классического аналога.

### 3.2 Применение эффекта Зеемана

**Эффект Зеемана в астрономии.** В середине XX века началась космическая эра человечества. В наше время каждый образованный человек стремится знать, что такое Космос, иметь представление о космических объектах и происходящих во Вселенной процессах. Эффект Зеемана отражает особенности свойств атомов в магнитном поле Вселенной. Термин «магнитное поле» ввел в 1845 году М.Фарадей, считавший, что взаимодействия зарядов и токов осуществляются посредством материального поля. Магнитные поля в природе разнообразны по масштабам, механизму возникновения и по вызываемым эффектам. В космосе эти поля являются одним из широко распространенных объектов, играющих важную роль в явлениях и процессах, наблюдаемых во Вселенной. Разнообразен магнетизм в Космосе. Это магнетизм звезд, планет, межпланетного и межзвездного пространства. Достаточно сильные магнитные поля некоторых планет приводят к образованию радиационных поясов. Межпланетное и межзвездное магнитные поля влияют на распространение заряженных частиц в космическом пространстве. В интенсивно развивающейся астрофизике исследуется как механизм возникновения магнитных полей различных космических объектов, их природа, так и влияние поля на различные процессы, в том числе на излучение атомов или ионов, проявляющееся в эффекте Зеемана.

По зеемановскому расщеплению спектральных линий обнаружены магнитные поля звезд, проведены первые измерения магнитного поля пятен Солнца. Впервые магнитное поле было обнаружено на ближайшей к нам звезде – Солнце, когда в 1908 году Дж.Хейл измерил зеемановское расщепление спектральных линий в солнечных пятнах. Магнитное поле активных областей, пятен и других образований на Солнце также измеряется по обратному эффекту Зеемана. Часто компоненты расщепления сливаются между собой. Магнитное поле вызывает общее расщепление спектральных линий. Магнитное поле в этих случаях определяется поляризационными методами. Общее магнитное поле Солнца  $\sim 1 \text{ Гс}$ , в пятнах – несколько тысяч  $\text{Гс}$ .

Все звезды, кроме Солнца, настолько удалены от Земли, что воспринимаются как точечные объекты. Поэтому их магнитное поле измеряется как усредненное по всей поверхности. Очень малое количество света, принимаемого от удаленных звезд, позволяет с помощью эффекта Зеемана регистрировать только достаточно сильные магнитные поля. Таким способом удалось обнаружить особую группу звезд с сильными полями, которые называли магнитными. Выяснено, что магнитные

поля на поверхности магнитных звезд достигают нескольких тысяч  $Gc$ , а у звезды HD 215441 наблюдается сильное поле  $\approx 3,4 \cdot 10^4 Gc$ . Такие звезды называли магнитными. Очень сильные магнитные поля, превосходящие  $10^6 Gc$ , обнаружены по зеемановскому эффекту у нескольких вырожденных звезд - белых карликов. В сверхсильных полях разрушается связь орбитальных и спиновых моментов отдельных электронов. В результате имеет место эффект Зеемана отдельных квазинезависимых электронов.

В целом использование эффекта Зеемана для регистрации измерения магнитных полей звезд представляет большие трудности. Поэтому с помощью этого эффекта магнитные поля зарегистрированы у небольшого количества звезд. При измерениях магнитных полей звезд зеемановское расщепление спектральных линий обычно наблюдается в поглощении. Продольный компонент магнитного поля измерен у нескольких сотен звезд различных спектральных классов.

Магнитные поля заполняют межзвездное пространство галактик. По зеемановскому расщеплению спектральной линии поглощения водорода с длинной волны 21 см измеряются магнитные поля в различных областях нашей Галактики. Выбор линии поглощения для таких измерений позволяет наблюдать на фоне яркого радиоисточника резкую линию. Таким методом были измерены магнитные поля в плотных и холодных облаках межзвездного газа, сквозь которые проходили волны, идущие от ярких галактических радиоисточников: Кассиопея А, Телец А и другие. В облаке, расположенном в направлении источника Кассиопея А, магнитное поле имеет величину  $\approx 2 \cdot 10^{-6} Gc$ , а в облаках газа магнитное поле в 5-10 раз больше. Таким путем определяется только продольный (вдоль луча зрения) компонент магнитного поля.

Метод определения магнитного поля по эффекту Зеемана является прямым методом. В науке для регистрации магнитных полей в Космосе разработаны и другие непрямые методы. Например, у многих звезд обнаружены циклы активности, пятна, горячие короны, как и у Солнца. Поэтому можно говорить о том, что у них тоже есть магнитное поле. Правильность такого метода подтверждена тем, что у звезды  $\xi B_{00}(G8)$  магнитное поле определено и косвенным методом и по эффекту Зеемана. Результаты ( $\approx 2,5 \cdot 10^3 \text{Э}$ ) совпали.

**Другие применения эффекта Зеемана.** Как отмечалось выше, исследование эффекта Зеемана сыграло большую роль в развитии квантовой механики, в том числе в изучении атомов и атомных систем. Это явление тесно связано с мультиплетной структурой спектров, поэтому исследование картины зеемановского расщепления важно для изучения тонкой структуры атомов и атомных систем.

Эффект Зеемана используется в спектроскопии. Один из методов количественного анализа вещества основан на свойствах атомов поглощать свет с определенной длиной волны (резонансное поглощение). Это метод атомно-абсорбционной спектроскопии. Применение этого метода предполагает наличие вещества в атомарном состоянии (совокупность невзаимодействующих атомов). Используются различные методы атомизации вещества: пламенная атомизация, электротермическая атомизация (ЭТА), гидридная техника, метод «холодного пара». Но при любом методе атомизации может оставаться вещество в виде молекул или твердых частиц. Поэтому необходима коррекция, то есть исключение влияния на полученные результаты других атомов или частиц, присутствующих в атомизаторе. Один из методов коррекции основан на использовании эффекта Зеемана. Этот метод дает наилучшую селективность, то есть выделение излучения атомов на фоне поглощения посторонними молекулами и частицами.

Применение эффекта Зеемана в атомной спектроскопии основано на следующих особенностях этого явления. Во внешнем магнитном поле происходит расщепление атомной спектральной линии на несколько компонент. В простейшем случае расщепление происходит на три компоненты: одну  $\pi$ , совпадающую с максимумом длины волны исходной линии и  $2-x + \sigma$  и  $- \sigma$ , симметрично смещенных. Расщепление тем больше, чем выше напряженность магнитного поля. При этом  $\pi$  и  $\sigma$  компоненты имеют различную поляризацию. Благодаря этому можно проводить раздельное измерение поглощения  $\pi$  и  $\sigma$  компонент. При измерении в присутствии  $\pi$  компоненты происходит измерение суммарного поглощения - атомного и неселективного, а в ее отсутствие – только неселективного.

До сих пор мы говорили об эффекте Зеемана, наблюдаемого на спектрах атомов, но этот эффект может наблюдаться и в молекулярных спектрах. Однако сами молекулярные спектры значительно сложнее атомов, сложнее оказывается картина расщепления. Спектральные полосы могут перекрываться. Все это осложняет изучение и использование эффекта Зеемана на молекулярных спектрах. Это относится и к спектрам кристаллов. В таких системах чаще используются спектры поглощения.

Если излучающий атом находится в магнитном поле, то могут быть квантовые переходы между зеемановскими подуровнями, принадлежащими различным уровням энергии. Это зеемановский эффект на спектральных линиях, но можно наблюдать магнитные квантовые переходы между подуровнями одного уровня энергии. Такие переходы происходят под действием излучения с частотами в СВЧ диапазоне электромагнитных волн. При наблюдении спектров поглощения обнаруживается эффект избирательного поглощения радиоволн в парамагнитных веществах, помещенных в магнитное поле. Это явление называется электронным парамагнитным резонансом. На основе этого эффекта разработаны различные приборы квантовой электроники. Одним из таких приборов является квантовый магнетометр, используемый для прецизионного (с высокой точностью) измерения слабых магнитных полей.

**Примечание: История открытия эффекта Зеемана.** Один из основателей квантовой физики М.Джеммер заметил, что выдающиеся физики, среди которых был Беккерель, отмечали, что открытие эффекта Зеемана особо сильно повлияло на концептуальное развитие квантовой теории. Эффект Зеемана играет большую роль в современной физике, в том числе астрофизике. Поэтому интересно рассмотреть историю открытия.

Работа М.Джеммера содержит информацию по истории исследования внешних магнитных полей на спектральные линии излучения атомов. На возможность такого влияния первым указал Майкл Фарадей. Это отмечено в биографии М.Фарадея, написанной Дж.Максвеллом: последней экспериментальной работой великого экспериментатора был поиск связи между светом и магнетизмом, поиск изменения в линиях спектра при действии мощного магнита. После М.Фарадея некоторые физики также пытались обнаружить влияние магнитного поля на спектральные линии, но, как показали последующие исследования, искомый эффект маскировался другими факторами. Первые поиски П.Зеемана также были безуспешные, но через несколько лет П.Зееман прочитал у Дж.Максвелла об опытах М.Фарадея. П.Зееман верил в гений М.Фарадея и, следовательно, в его идеи о влиянии магнетизма на свет. Он решил повторить опыты М.Фарадея в условиях современных ему возможностей. Опыт проводился в университете г. Лейден с использованием мощного электромагнита к решетке Роуланда с 14983 штрихами на дюйм. Было замечено, что, когда включался ток, то есть создавалось магнитное поле, две D-линии натрия отчетливо уширились. П.Зееман сделал вывод, что период натриевого излучения в магнитном поле изменяется.

О своих результатах П.Зееман сообщил Х.Лоренцу, создателю классической электронной теории вещества. Х.Лоренц разложил движение квазиупруго связанной заряженной частицы на линейное колебание параллельное направлению поля (на него магнитное поле не влияет  $F_{\perp} = qvB \sin \alpha = 0$   $\alpha = 0$   $F_{\perp} = 0$  и два круговых движения, происходящих в противоположных направлениях в плоскости перпендикулярной магнитному полю. В результате своих исследований он теоретически предсказал, что при наблюдении по направлению поля (продольное направление) излучение от краев уширенной линии должно быть поляризовано по кругу, а при наблюдении в направлении перпендикулярном полю (поперечное направление) - линейно поляризовано. Этот вывод П.Зееман проверил и подтвердил экспериментально. В 1897 г. он успешно «разрешил» уширенную линию  $\lambda = 4800 \text{ \AA}$  кадмия на дублет при наблюдении в продольном направлении и триплет – в поперечном. Использовалось магнитное поле напряженностью **32000 Гс**.

Необходимо отметить, что результат Х.Лоренца оказался частным случаем электродинамической теоремы Дж.Лармора (1897). Смысл теоремы в том, что влияние магнитного поля на группу вращающихся ионов или электронов состоит в том, что на орбитальное движение накладывается прецессия вокруг направления поля с угловой частотой, зависящей от отношения  $q/m$ . Дж.Лармор решал нерелятивистское уравнение и считал излучающей системой атом в целом. В формуле частоты Дж. Лармора

$$\omega = \frac{eH}{2mc},$$

$m$  – масса атома. Следовательно, отношение  $q/m$  - очень мало. Поэтому Дж.Лармор считал, что влияние магнитного поля на излучение так мало, что его трудно заметить. Когда был открыт электрон и его отношение  $e/m$  (катодные лучи,  $\beta$  - излучение, Дж.Томсон, 1897 год) оказалось, что отношение  $e/m$  для электрона совпадает с отношением  $q/m$  в эффекте Зеемана. Это явилось одним из убедительных доказательств того, что электрон действительно входит в состав атома, и что именно он является ответственным за излучение, испускаемое атомом. Характер поляризации линий в эффекте Зеемана подтверждал отрицательный заряд источника излучения.

Для истории физики важно, что П.Зееману удалось расщепить некоторые линии в спектрах кадмия и цинка, принадлежащее к классу синглетных линий. Именно для таких линий наблюдается согласие эксперимента с теорией Х.Лоренца, Дж.Лармора. Если бы ему удалось расщепить уширенные линии натрия, то проблема не была бы решена в рамках классической физики. В связи с этим важно сообщение С.Престона, сделанное им в конце 1897 года об экспериментах по эффекту Зеемана. С помощью решетки с 14438 штрихов на дюйм обнаружено, что голубая линия кадмия не принадлежит классу триплетов, а является квинтетом. А из двух линий натрия одна представляет секстет, а другая – квинтет. Дальнейшие исследования показали, что триплет в магнитном поле – редкое явление. Чаще наблюдается расщепление с более сплошной картиной.

Как отмечено выше, на основе классической физики был объяснен только нормальный триплет Зеемана. Используя модель атома Резерфорда и боровскую теорию атома водорода, П.Дебай и А.Зоммерфельд также смогли объяснить только нормальный триплет, учитывая правило отбора для магнитного квантового числа  $\Delta m = 0; \pm 1$ . Был найден и ответ на вопрос о том, почему классическая теория Лоренца и квантовая теория Дебая-Зоммерфельда приводили к одинаковым результатам. Дело в том, что квантовую теорию от классической отличает наличие постоянной Планка  $\hbar$ , а она, в конечном счете в квантовых уравнениях эффекта Зеемана сокращалась, то есть не входила.

Дальнейшее исследование аномального эффекта Зеемана обнаружило его тесную связь с проблемой происхождения мультиплетной структуры спектральных линий. Было четко определено, что нормальный эффект Зеемана наблюдается на синглетах, а мультиплеты обнаруживают аномальный эффект.

Проблемы мультиплетной структуры спектров, эффекта Зеемана, а также результаты опытов О.Штерна и В.Герлаха по пространственному квантованию привели к гипотезе о существовании у электрона собственного магнитного момента и соответствующего ему собственного механического момента, который назвали **спином**. Гипотеза была сформулирована С.Гаудсмитом и Дж.Уленбеком. Именно учет наличия спина и собственного магнитного момента электрона позволил объяснить названные проблемы.

### 3.3 Классическая теория простого эффекта Зеемана

Теоретическому объяснению эффекта Зеемана уделяется большое внимание в классической и квантовой физике. На основе классической электронной теории простой эффект рассмотрен. Рассматривается связанный электрон под действием квазиупругой силы, который, если пренебречь затуханием вследствие лучистого трения, способен вызывать гармонические колебания. Электрон может участвовать одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях с одинаковой угловой частотой  $\omega_0$ . Это приводит к движению электрона по эллипсу. В квантовой теории Бора также рассматривается движение электрона по эллипсу или окружности, это орбитальное движение. Ему соответствует механический момент:

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$$

$$\vec{p} = m\vec{v} - \text{импульс электрона}$$

Пусть атом с орбитальным электроном помещен в магнитное поле. Он будет вести себя как магнит, то есть он должен установиться своим магнитным моментом параллельно полю. На магнитный момент в магнитном поле действует момент сил

$$\vec{\mu}_F = [\vec{M}\vec{B}], \quad \mu_F = MB \sin \alpha.$$

Момент сил будет вращать магнитный момент до тех пор пока не станет  $\vec{\mu}_F = 0$ . Это будет тогда, когда станет  $\vec{\mu} \uparrow \uparrow \vec{B}$ . Но такому повороту препятствует то, что атом является волчком. Подобно тому как ведет себя волчок в поле силы тяготения атом должен совершать прецессионное движение около направления поля. В механике прецессией называется движение оси гироскопа под действием внешнего момента сил, приложенных к этой оси. Относительно неподвижной системы координат орбита перестает быть плоской и становится очень сложной.

Считаем, что поле настолько слабое, что не оказывает существенного влияния на величину орбитального магнитного момента:

$$\vec{\mu}_F = [\vec{M}\vec{B}] = \left[ -\frac{e\vec{L}}{2m}\vec{B} \right] = \left[ \frac{e\vec{B}}{2m}\vec{L} \right]$$

Обозначим  $\frac{e\vec{B}}{2m} = \vec{\omega}_L$  - эта величина имеет смысл частоты и называется ларморовой частотой.

$$\vec{\mu}_F = [\vec{\omega}_L, \vec{L}], \quad \vec{\mu}_F = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{\omega}_L, \vec{L}] \quad \vec{\omega}_L \uparrow\uparrow \vec{B},$$

$$\omega_L = \frac{eB}{2m}, \quad \vec{\mu}_F = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{\omega}_L, \vec{L}]$$

$d\vec{L} \perp \vec{\omega}_L$ ,  $d\vec{L} \perp \vec{B} \Rightarrow$  угол между  $\vec{\omega}_L$  и  $\vec{L}$  не изменяется, а конец вектора  $\vec{L}$  вращается по окружности вокруг направления магнитной индукции  $\vec{B}$  с угловой частотой  $\vec{\omega}_L$ , пропорциональной  $\vec{B}$  (рисунок 3.3).

Полученный результат сформулирован в виде теоремы Лармора: *изменение движения электрона, обусловленные магнитным полем с индукцией  $\vec{B}$ , сводится к вращению электрона вокруг направления  $\vec{B}$  с угловой частотой  $\vec{\omega}_L$ .*

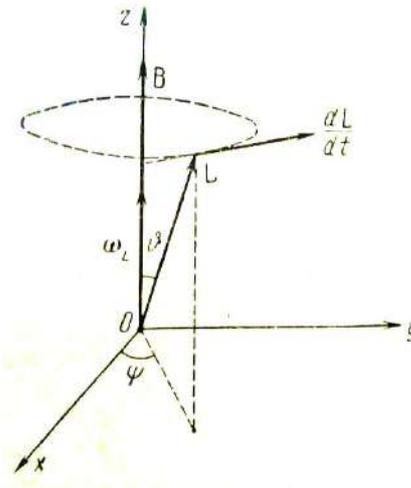


Рисунок 3.3 Прецессия механического момента электрона в магнитном поле

Теорема Лармора доказывалась при условии слабого поля. Но тогда вопрос: какое поле можно считать слабым? Расчеты показывают, что этому удовлетворяет условие

$$\omega_L \ll \omega_0 \Rightarrow \frac{eB}{2m} \ll \omega_0 \Rightarrow B \ll \frac{2m}{e} \omega_0$$

По представлениям классической электронной теории угловая скорость вращения электрона должна совпадать с частотой излучения. Тогда, например, в оптической области при  $\omega_0 \approx 10^{15} \text{ c}^{-1}$  условие слабости поля выполняется при

$$B \ll \frac{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{15}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 10^4 \text{ Тл.}$$

Таким образом, теория справедлива в достаточно широкой области значений магнитной индукции. Достигнуты поля 500000 эрстед, то есть 50 Тл.

В частном случае, когда движение электрона по окружности происходит в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, теорема Лармора сводится к следующему утверждению: если в отсутствие магнитного поля угловая скорость электрона  $\omega_0$ , то в магнитном поле в той же неподвижной системе координат они будут равны  $\omega = \omega_0 \pm \omega_L$ , где знак плюс относится к случаю, когда вектора  $\vec{\omega}_0$  и  $\vec{\omega}_L$  параллельны, а знак минус – если они антипараллельны.

Интересен вопрос о влиянии силы Лоренца на движение электрона в случае, когда атом находится во внешнем магнитном поле. На орбите электрон удерживает сила Кулона

$$F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Она равна центробежной силе инерции

$$F_{ц} = mr\omega_0^2, \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = mr\omega_0^2$$

При включении магнитного поля на электрон действует сила Лоренца

$$F_{л} = e[\vec{v}\vec{B}]$$

Если магнитное поле перпендикулярно к плоскости орбиты, то сила Лоренца направлена по радиусу (по правилу винта, рисунок 3.4). Но влияние магнитного поля не проявляется в том, что радиус орбиты увеличивается или уменьшается. Радиус остается неизменным. Влияние магнитного поля проявляется в том, что изменяется угловая скорость обращения электрона при неизменном радиусе орбиты. Это кажется неожиданным.

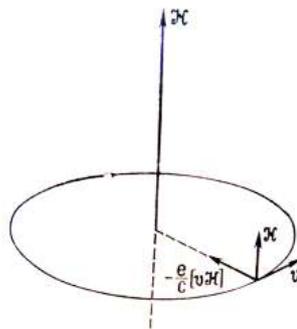


Рисунок 3.4 Направление силы Лоренца.

Но проанализируем процесс. При включении магнитного поля на электрон, кроме кулоновской силы ( $F = \frac{e^2}{r^2}$ ), действует еще сила Лоренца, равная  $\frac{e}{c}[vH]$ . Но магнитное поле не сразу достигает своей конечной величины, а устанавливается в течение известного промежутка времени. Этот промежуток настолько велик по сравнению с периодом обращения электрона, что весь процесс можно рассматривать как бесконечно медленный, подобно адиабатическим процессам в термодинамике. Возрастание магнитного поля по закону электромагнитной индукции Фарадея (точнее говоря, вследствие второго уравнения электродинамики Максвелла) влечет за собой появление вихревого электрического поля с осью симметрии, совпадающей с направлением магнитного поля. Именно это вихревое электрическое поле воздействует на электрон, ускоряя или замедляя его. Сила Лоренца не может изменить частоту обращения, так как она направлена перпендикулярно к скорости и, следовательно, никакой работы не совершает.

Используется второе уравнение Максвелла в интегральной форме, то есть обобщенный закон электромагнитной индукции. Рассматривается возникшее вихревое электрическое поле и работа этого поля над электроном. Эта работа сегодня затрачивается на увеличение кинетической энергии электрона. Если при этом изменяется радиус орбиты, то должна увеличиваться и потенциальная энергия. Оказывается, что если состояние электрона изменяется медленно (адиабатическое приближение), то изменение радиуса равно нулю. Изменяется только частота в соответствии с теоремой Лармора.

**Эффект Зеемана. Общий случай.** Рассмотрим более общий случай влияния магнитного поля на электронную орбиту и покажем, что классическая теория точно описывает все стороны явления, включая состояние поляризации линий. Пусть мы имеем диполь, причем положительный заряд пусть будет закреплен в начале координат, а электрон с зарядом  $e$  связан с положительным зарядом квазиупругой силой. Уравнение свободных колебаний электрона есть

$$m\ddot{r} + fr = 0$$

В присутствии магнитного поля появляется сила Лоренца. Если выбрать систему координат так, чтобы направление поля совпало с осью  $z$ , то уравнение движения электрона можно разложить на 3 уравнения:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\Omega\dot{y} = 0, \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y - 2\Omega\dot{x} = 0, \quad \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

Здесь  $\Omega$  - удвоенная частота Лармора. Решение первых двух дифференциальных уравнений будем искать в виде

$$x = ae^{i\omega t}, \quad y = be^{i\omega t}$$

При условии, что частота Лармора много меньше собственной частоты колебаний электрона под действием квазиупругой силы колебаниям, происходящих по осям  $x$  и  $y$ , то есть перпендикулярных к магнитному полю, соответствуют частоты, совпадающие со смещенными частотами в триплете Лоренца. Для коэффициентов  $a$  и  $b$  в решении дифференциальных уравнений получаются соотношения

$$\frac{a}{b} = -i \quad \text{или} \quad a = -ib = be^{\frac{i\pi}{2}}$$

Первое соотношение означает, что колебание по оси  $x$  отстает по фазе от колебания по оси  $y$  на  $\frac{\pi}{2}$ . Оба колебания дают круговое вращение, и притом, принимая во внимание указанное соотношение фаз, вращение по часовой стрелке, т.е. правокруговую поляризацию. Из второго соотношения между  $a$  и  $b$  следует левокруговая поляризация. Третье уравнение системы:

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

показывает, что колебание по оси  $z$  происходит без изменения частоты; оно имеет линейную поляризацию. Однако наблюдатель, смотрящий на встречу силовым линиям магнитного поля (продольное направление), не увидит этого третьего компонента, так как изучение диполя в направлении колебаний равно нулю.

Итак, в продольном направлении картина эффекта Зеемана состоит из двух *смещенных* линий; обе поляризованы по кругу, причем линия, смещенная в красную сторону, поляризована по правому кругу, а линия, смещенная в фиолетовую сторону, по левому кругу. Наблюдатель, смотрящий перпендикулярно к направлению магнитного поля, например, по оси  $x$ , увидит несмещенную линию, так как колебания по оси  $z$  дают максимальное излучение в перпендикулярном направлении. Он увидит также оба смещенных компонента по следующей причине: диполь, колеблющийся по оси  $x$ , не дает излучения в направлении этой оси. Но оба колебания в плоскости  $xy$  дают компоненты,

поляризованные по кругу. Поэтому наблюдатель, который смотрит навстречу оси  $x$ , увидит проекции круговых колебаний на ось  $y$ , а наблюдатель, смотрящий по оси  $y$ , увидит проекции круговых колебаний на ось  $x$ . Таким образом, картина поперечного эффекта Зеемана состоит из трех линий: несмещенной и двух смещенных. Все линии линейно поляризованы: несмещенная имеет колебания электрического вектора по направлению поля, смещенные – перпендикулярно к полю. Для случая простого эффекта Зеемана все изложенные результаты классической теории подтверждаются совершенно точно.

### 3.4 Квантовая теория эффекта Зеемана

Простой эффект Зеемана находит объяснение и в квантовой механике в рамках уравнения Шредингера для водородного или водородоподобного атомов. Для этого в уравнение необходимо ввести дополнительные члены, отражающие действие магнитного поля на атом. В постоянном магнитном поле в гамильтониан необходимо сделать переход

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}.$$

Здесь  $\vec{p} = m\vec{v}$ ,  $\vec{A}$  – векторный потенциал магнитного поля. Если учесть условие калибровки (условие Лоренца)  $\text{div}\vec{A} = 0$  и рассмотреть слабое поле, то есть пренебречь членом с квадратом векторного потенциала  $\left(\frac{e^2}{2\mu c^2} \vec{A}^2\right)$ , то оператор Гамильтона приобретает вид

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta - \frac{e\hbar}{i\mu c} \vec{A} \text{grad} + U.$$

Решение этого уравнения дает собственные значения оператора энергии в виде

$$E_k = E'_k - m \frac{e\hbar}{2\mu c} H$$

Здесь  $E'_k$  – собственные значения энергии атома при отсутствии магнитного поля. Полученный результат означает, что энергетический уровень  $E'_k$  распадается на  $2\ell + 1$  подуровней в зависимости от значения магнитного квантового числа  $m$ . Вырождение по  $m$  снимается.

Частота излучения

$$\omega = \frac{E_k - E'_k}{\hbar} = \frac{E'_k - E'_k}{\hbar} - \Delta m \frac{e}{2\mu c} H = \omega_0.$$

Согласно правилам отбора, разрешенные переходы соответствуют изменениям  $\Delta m = 0, \pm 1$ .

Таким образом, спектральная линия  $\omega_0$  в магнитном поле расщепляется на три линии с частотами

$$\omega_0 + \frac{e}{2\mu c} H, \quad \omega_0, \quad \omega_0 - \frac{e}{2\mu c} H$$

Получен нормальный триплет Зеемана.

**Примечание.** Как отмечалось выше, простой триплет наблюдается только на синглетах в любом магнитном поле, а на мультиплетах – только в сильном. В частности, для атома водорода в слабом поле простой триплет не наблюдается. При этом уменьшение частоты также связано с лоренцевым расширением энергетических уровней по магнитному квантовому числу, но связь изменения частоты излучения с этим расщеплением гораздо сложнее.

**Сложный эффект Зеемана. Эффект Пашена-Бака.** Все атомы, имеющие один излучающий электрон, то есть атомы  $H$ ,  $He^+$ ,  $Li^{++}$ ,  $Be^{+++}$  и другие, а также нейтральные атомы первой группы периодической системы в слабом магнитном поле дают сложный эффект Зеемана. В случае простого эффекта, как известно, получается три линии при наблюдении в направлении, перпендикулярном к полю, и две – при наблюдении вдоль поля. Величина смещения при этом выражается формулой Лоренца

$$\Delta\nu = \frac{e\hbar}{2\mu c^2} H \text{ см}^{-1} = 14,67 \cdot 10^{-5} H \text{ см}^{-1}$$

Опыт показал, что такое расщепление дают только линии, не имеющие тонкой структуры (так называемые синглеты); для дублетов и линии с более сложным расщеплением (триплеты и т. д.) получается, как правило, сложный эффект: общее число компонентов оказывается большим и притом четным, а величины расщепления не совпадают с нормальным лоренцевым расщеплением.

На рисунке 3.5 приведено три примера эффекта Зеемана: на одиночной линии цинка – простой эффект, на дублете натрия – сложный эффект, 10 компонентов; на триплете цинка – также сложный эффект, 18 компонентов.

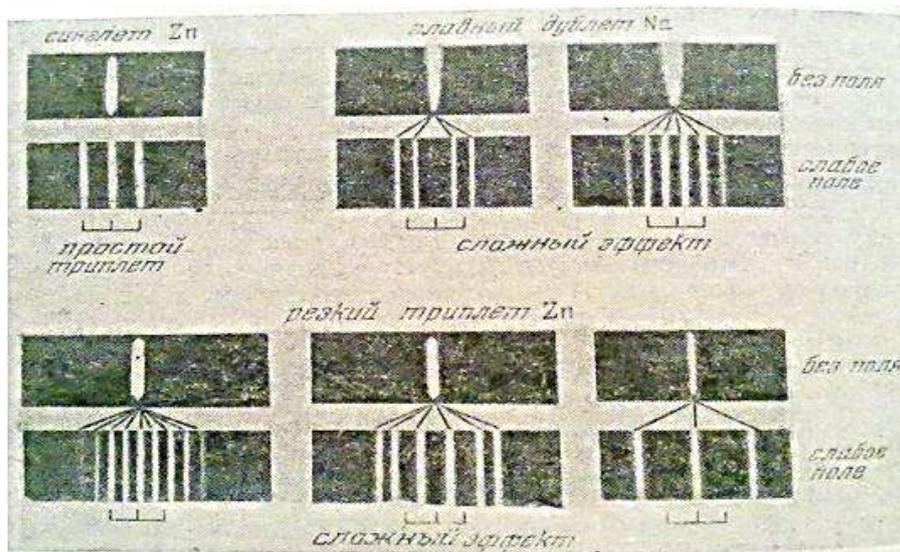


Рисунок 3.5 Простой и сложный эффекты Зеемана при наблюдении перпендикулярно магнитному полю

Что касается величины расщепления в сложном эффекте, то имеет место значительный закон: *величина смещения в сложном эффекте всегда составляет рациональную дробь нормального лоренцева смещения*; например, если обозначить нормальное смещение (8) через  $\nu_L$ , то компоненты расщепления главной серии таковы:

$${}^2S_{1/2} - {}^2P_{1/2} : \pm \frac{2}{3} \nu_L \quad \pm \frac{4}{3} \nu_L;$$

$${}^2S_{1/2} - {}^2P_{3/2} : \pm \frac{1}{3} \nu_L \quad \pm \frac{3}{3} \nu_L, \quad \pm \frac{5}{3} \nu_L$$

Как видно, во всех случаях знаменатель дроби один и тот же, именно 3. Для расщепления триплета главной серии (например, триплета цинка) имеется также характерный знаменатель 2; сами расщепления выражаются при этом такими дробями, как  $\frac{1}{2} \nu_L$ ,  $\frac{2}{3} \nu_L (= \nu_L)$ ,  $\frac{3}{2} \nu_L$  и так далее.

Квантовая механика объясняет сложный эффект Зеемана на примере атома с одним валентным электроном на основе векторной модели, согласно которой орбитальный  $\vec{L}$  и собственный  $S$

механические моменты вследствие спин-орбитального взаимодействия прецессируют относительно полного  $\vec{J}$  механического момента.

Существование спин-орбитального магнитного взаимодействия позволяет объяснить почему на мультиплетах эффект Зеемана проявляется не одинаково в сильных и слабых полях. Это объяснение основано на сравнении величины расщепленных энергетических уровней вследствие спин-орбитального взаимодействия, обеспечивающего тонкую структуру спектральных линий с расщеплением, создаваемым магнитным полем. Понятно, что в сильном магнитном поле, таком, что создает значительное расщепление, мультиплетное расщепление вследствие спин-орбитального взаимодействия становится незначительным. В этом суть магнитооптического превращения или эффекта Пашена-Бака.

В слабом магнитном поле не имеет смысла рассматривать отдельно  $\vec{L}$  и  $S$ . Значение имеет их сумма  $\vec{L}+S = \vec{J}$ . Во внешнем магнитном поле сохраняется модуль полного механического момента, но не сохраняется его направление. Поэтому атом в магнитном поле ведет себя и как волчок и как магнит. Внешнее поле стремится установить атом-магнит по своему направлению, а гироскопические свойства волчка препятствуют этому. Возникает прецессия  $\vec{J}$  вокруг сильного магнитного поля, но при слабом поле ее частота значительно меньше угловой частоты внутренней прецессии  $\vec{L}$  и  $S$  относительно  $\vec{J}$ . Добавочная энергия, приобретаемая атомом в магнитном поле, является энергией взаимодействия дипольного магнитного момента с магнитным полем

$$W_{\text{эз}} = -(\vec{M}\vec{B}).$$

Среднее значение этой энергии вычисляется методом возмущений, так как вследствие малости эта энергия может рассматриваться как малое возмущение невозмущенного состояния. Получено значение

$$\Delta E = g m \mu_0 H$$

### Вопросы для контроля знаний

1. Эффект Зеемана.
2. Место эффекта Зеемана в квантовой теории. Спин электрона.
3. Применение эффекта Зеемана.
4. Эффект Зеемана в астрономии.
5. Классическая теория простого эффекта Зеемана.
6. Квантовая теория эффекта Зеемана.
7. Сложный эффект Зеемана. Эффект Пашена-Бака.

## Глава 4. ВЕЩЕСТВО В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

### 4.1 Проводники и диэлектрики в электрическом поле. Классификация диэлектриков

Электрический ток – это движение зарядов, поэтому проводниками являются те вещества, которые содержат свободные заряды. Такие заряды есть в металлах – это электроны. В электростатике можно рассмотреть две ситуации. Первая ситуация, незаряженному металлу сообщается заряд  $q$ . В незаряженном металле количество положительных и отрицательных зарядов одинаково, то есть количество протонов в ядре совпадает с количеством электронов в оболочках. У заряженного металла это равновесие нарушается. Передача зарядов происходит в форме электронов. При передаче заряда металлу, переданный заряд распределяется только по поверхности проводника. Заряды создают электрическое поле и движение зарядов внутри проводника и по его поверхности будет происходить до тех пор, пока поле зарядов внутри будет равно нулю. Поля внутри взаимокompенсируются. Вне проводника поле перпендикулярно поверхности  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_n = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0}$ .

Вторая ситуация, когда незаряженный проводник вносится в электрическое поле. Тогда свободные электроны начинают двигаться в направлении противоположном полю. Создается дополнительное поле  $\mathbf{E}'$ . Смещение электронов может происходить до тех пор пока по модулю будет  $\mathbf{E} = \mathbf{E}'$ , и суммарное поле в проводнике будет  $\vec{E}_{\text{пр}} = \vec{E} + \vec{E}' = \mathbf{0}$ . Потенциал проводника одинаков во всех точках поверхности.

Диэлектрики не содержат свободных зарядов, но у них есть связанные заряды, поэтому диэлектрики, как и металлы, изменяют свое состояние в электрическом поле и соответственно изменяют это поле. Рассмотрим диэлектрики подробнее.

Термин «диэлектрики» ввел английский физик М. Фарадей для обозначения среды, в которой может длительное время существовать электрическое поле, или веществ, в которые проникает электрическое поле.

Термин «диэлектрик» (от англ. dielectric) происходит от греческих слов dia - через, сквозь и английского electric - электрический. Диэлектриками могут быть не ионизованные газы, некоторые жидкости и твердые тела.

Известно, что по своим электрическим свойствам вещества принято делить на проводники, полупроводники и диэлектрики. Такая классификация рассматривалась в классической физике и получила более строгое обоснование с позиции современной квантовой физики, которая положена в основу зонной теории твердых тел. Проводники, полупроводники и диэлектрики входят в содержание обучения физики в школе и в вузе. Их изучение направлено на понимание обучающимися особенностей физических процессов в различных веществах и учета этих особенностей в практическом применении [6]. Диэлектрикам в содержании физики отводится значительное место в соответствии с многообразием физических процессов, определяющих их свойства, и их широким применением в различных областях науки и техники. В данной статье внимание обращено на некоторые из свойств диэлектриков.

**Принципиальные различия между диэлектриками и проводниками (металлами).** Различие в свойствах проводников и диэлектриков в электрическом поле связано с различием в их структуре. Иногда, говоря о различии между диэлектриками и проводниками, указывается, что в диэлектрик внешнее поле проникает, а в проводник поле не проникает. С точки зрения физики процесса — это не совсем так. Внешнее поле проникает и в металлы, и в диэлектрики, но в металлах есть большое количество свободных зарядов, которые смещаются под действием электрического поля таким образом, что на концах проводника возникает электризация, то есть заряды противоположных знаков. Электронов в проводнике достаточно, чтобы они своим смещением создали поле  $\vec{E}'$  по модулю равное  $\vec{E}$ . И так, что  $\vec{E}' \uparrow \downarrow \vec{E}$ ,  $\vec{E}' + \vec{E} = \mathbf{0}$ . Таким образом, проникшее внутрь металла внешнее поле полностью компенсируется полем, создаваемым в результате электризации проводника. Напряженность электрического поля связана с потенциалом формулой  $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ . Отсюда следует, что внутри проводника потенциал во всех точках, включая точки поверхности, одинаков, не является функцией координат. Следовательно, заряженный проводник, или проводник в электростатическом поле является эквипотенциальным.

В диэлектрике также создается поле  $\vec{E}'$  за счет механизма поляризации диэлектрика, но поле  $|\vec{E}'| < |\vec{E}|$ , то есть оно не компенсирует полностью внешнее поле. Поэтому при наличии внешнего поля внутри диэлектрика  $\vec{E}$  не равно нулю. Диэлектрик не является эквипотенциальным.

Наличие свободных зарядов в проводнике приводит к тому, что внутри проводника не могут существовать объемные заряды. В какую бы точку проводника не были бы помещены заряды на поверхности или внутрь, они достаточно быстро, по экспоненциальному закону, распределяются только по поверхности проводника. Заряды на поверхности распределяются таким образом, чтобы создаваемое ими поле внутри проводника было полностью скомпенсировано, то есть  $\vec{E} = \mathbf{0}$ . Заряды по поверхности проводника распределяются таким образом, чтобы наступило равновесие, то есть прекратилось движение зарядов по поверхности. Отсутствие движения зарядов по поверхности, означает, что вблизи проводника нет тангенциальной составляющей электрического поля  $E_t = \mathbf{0}$ ,  $E = E_n$ .

По поверхности диэлектрика заряды двигаться не могут, поэтому поле вблизи диэлектрика может иметь и нормальную, и тангенциальную составляющие.

Различие в свойствах проводника и диэлектрика в постоянном электростатическом поле сведены в таблицу 2.

Таблица 2. Различие свойств проводников и диэлектриков

Проводники	Диэлектрики
Напряжённость электрического поля внутри равна нулю $\vec{E} = \mathbf{0}$	Напряжённость электрического поля внутри не равна нулю $\vec{E} \neq \mathbf{0}$
Объёмная плотность заряда равна нулю. $\rho = 0$	Объёмная плотность заряда может быть отличной от нуля $\rho \neq 0$
Вне проводника вблизи поверхности $E = E_n$	Линии напряжённости могут быть не перпендикулярны поверхности диэлектрика.
$\varphi = const$	Различные точки диэлектрика могут иметь разный потенциал. Говорить о «потенциале диэлектрика» не имеет смысла.

На практике и в содержании обучения отличие диэлектрика от проводника определяется его малой проводимостью по сравнению с электропроводностью проводника. В этом смысле диэлектрик рассматривается как электроизоляционный материал. Удельное сопротивление диэлектрика очень велико  $10^9 - 10^{19} \text{ Ом}\cdot\text{см}$ . Однако, понятие диэлектрика является более широким, чем понятие изолятора. Например, диэлектрическими свойствами обладают и многие полупроводники.

Если продолжительность приложения разности потенциалов, созданной внешними источниками мало, или внешнее поле достаточно быстро изменяется, то и вещества, имеющие заметную электропроводность, могут вести себя как диэлектрики. Это происходит потому, что свободные заряды не успевают смещаться и полностью компенсировать внешнее поле. Переменные электромагнитные поля создают токи смещения  $J_{\text{смещ}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ . Уравнение Максвелла для магнитного поля:  $\text{rot } \vec{B} = \mu\mu_0 \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$ , здесь  $\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}_{\text{смещ}}$ ,  $\vec{D}$  - вектор электрической индукции. Это уравнение означает, что вихревое магнитное поле  $\vec{B}$  создается токами проводимости (свободными зарядами) и током смещения, то есть изменяющимся во времени электрическим полем. Но если поле быстро переменное, так что  $\vec{j}_{\text{смещ}} \gg \vec{j}$ , то вещество, обладающее сравнительно высокой проводимостью будет вести себя как диэлектрик.

**Поляризация диэлектриков.** Макроскопические свойства диэлектриков связаны со свойствами атомов, ионов, молекул, входящих в состав данного диэлектрика его структуры. Частицы, входящие в состав диэлектрика, поляризуются под действием поля. Совокупность поляризованных частиц создает обратное поле поляризации. Диэлектрическая проницаемость возрастает с увеличением числа частиц в единице объема, то есть с увеличением плотности. Поляризация подразделяется на несколько типов.

Электронная поляризация происходит за счет деформации электронных оболочек, то есть за счет смещения электронов относительно ядра. Она устанавливается очень быстро за время  $\sim 10^{-15}$  с. При смещении электронов возникает дипольный электрический момент, величина которого пропорциональна напряженности действующего поля (если поле не очень сильное). В терминологии классической электронной теории возникает квазиупругий диполь. Коэффициент пропорциональности  $\mathbf{p} \sim \mathbf{E}_d$ ,  $\mathbf{p} = \alpha_e \cdot \mathbf{E}_d$ ,  $\alpha_e$  – электронная поляризуемость. По порядку величины ее значение близко к кубу радиуса частицы, то есть порядка  $10^{-30}$  м, а это означает, что электронная поляризация очень мала. Но электронный тип поляризации является наиболее универсальным. Он проявляется во всех диэлектриках, но может не учитываться в силу малости по сравнению с другими механизмами поляризации. В случае только электронной поляризации в области видимого диапазона электромагнитных волн диэлектрическая проницаемость  $\epsilon \sim n^2$ . Однако известно, что это соотношение, которое следует и из теории Максвелла в области оптического диапазона, как правило, не выполняется. Например, у воды  $\epsilon = 81$ , а  $n = 33$ , это означает, что в механизм поляризации таких диэлектриков основной вклад вносят другие неэлектронные типы поляризации. К диэлектрикам с только электронным типом поляризации относятся азот, кислород, водород(газы), бензол, толуол и твердые атомные кристаллы нафталин и сера и другие. Электронный механизм поляризации связан с процессами внутри атома или молекулы, или иона, а эти процессы не зависят от температуры. Поэтому диэлектрическая проницаемость при электронной поляризации очень слабо зависит от температуры. Эта зависимость появляется только в следствии того, что при изменении температуры изменяется плотность вещества, то есть количество частиц в единице объема, суммарный дипольный момент которых определяет вектор поляризации. В переменном поле электронная поляризация изменяется практически без запаздывания вплоть до частот  $10^{15}$  Гц. Поэтому диэлектрические потери в веществах с чисто электронной поляризацией очень малы.

Ионная поляризация наблюдается в ионных кристаллах типа поваренной соли NaCl. Она является результатом сдвига ионов относительно друг друга. Такая поляризация может быть и в стеклах, содержащих подвижные ионы. Время установления поляризации порядка  $10^{-12}$  -  $10^{-13}$  с. Диэлектрическая проницаемость ионных кристаллов при электротехнических и радиотехнических частотах превышает  $n^2$  и лежит в пределах от 4 до 15. Упругая ионная поляризация до частот инфракрасной области спектра не зависит от частоты и не вносит вклада в диэлектрические потери при радиотехнических частотах. При увеличении температуры ионная поляризуемость растет за счет ослабления упругих связей между разноименными ионами, поэтому  $\epsilon$  ионных кристаллов с ростом температуры или слабо увеличивается или слабо уменьшается, поскольку ионная поляризация накладывается на электронную.

На практике наблюдаются важные случаи, когда оба изменения взаимно компенсируются и  $\epsilon$  ионного диэлектрика сложного состава практически не зависит от температуры (титанат циркония и другие). Такие диэлектрики применяются для температурно стабильных радиоконденсаторов.

В ионных кристаллах может быть и ситуация, когда наложение электронного и ионного смещения существенно увеличивает дипольный момент.  $\epsilon$  таких кристаллов достигает больших значений при не очень большой ионной поляризуемости. Например, титанатстронция  $\epsilon \sim 300$ . При этом может создаваться сильное внутреннее поле и без воздействия внешнего поля еще в процессе кристаллизации, например, титанат бария. Это внутреннее поле обусловлено спонтанной самопроизвольной поляризацией, которая приводит к особым свойствам диэлектрика (сегнетоэлектрики: резкая температурная зависимость  $\epsilon$  с точкой Кюри (фазовый переход)). Огромное значение  $\epsilon$  до десятка тысяч. Нелинейная зависимость поляризуемости от напряженности поля, что выражается как зависимость  $\epsilon$  от  $E$ . И существование диэлектрического гистерезиса аналогично ферромагнитному гистерезису.

В кристаллах с ковалентной связью (алмаз) поляризация обусловлена главным образом смещением электронов, обеспечивающих химическую связь. У них  $\epsilon$  значительно превышает  $n^2$  и доходит до 15. На чисто электронную поляризацию накладывается атомная поляризация, обусловленная смещением во внешнем электрическом поле электронов участвующих в ковалентной связи.

Ориентационная поляризация имеет место в случае, когда молекулы диэлектрика полярные, то есть обладают собственным дипольным моментом даже в отсутствии внешнего поля. В свободном состоянии в следствии хаотического движения и взаимодействия. Эти моменты хаотически ориентированы, так что суммарный дипольный момент равен нулю. При наложении внешнего поля происходит ориентация диполей по полю. Такой механизм поляризации часто наблюдается в

веществах с водородной связью. Поляризация диэлектрика с полярными молекулами существенно зависит от температуры. У нее поляризуемость  $\alpha \sim \frac{1}{T}$ . Это связано с тем, что в таком диэлектрике два конкурирующих процесса. Внешнее поле стремится упорядочить диполи по полю, а хаотическое движение и столкновения создают разупорядочение. С повышением температуры возрастает роль хаотического движения, поэтому труднее поляризовать диэлектрик, уменьшается  $\alpha$  и  $\epsilon$ . По заметному изменению  $\epsilon$  с изменением температуры экспериментально можно выделить диэлектрик с полярными молекулами.

**Пьезоэлектрики** – это диэлектрики кристаллические, в которых поляризация возникает без внешнего электрического поля при условии, что кристалл деформируется. Поляризация означает возникновение поверхностных зарядов на диэлектрике, за счет которых суммарный дипольный момент единицы объема диэлектрика, то есть вектор поляризации  $\mathbf{P}$  не равен нулю в отсутствие поля. При не очень больших деформациях вектор поляризации пропорционален механическому напряжению. Особое значение имеет обратный пьезоэффект, то есть, если диэлектрик в электрическом поле, то он должен деформироваться. Обратный пьезоэффект используется для получения звуковых волн высокой частоты. То есть как звуковой излучатель. **Пьезоэлектрики** – это диэлектрики кристаллические, в которых поляризация возникает без внешнего электрического поля при условии, что кристалл деформируется. Поляризация означает возникновение поверхностных зарядов на диэлектрике, за счет которых суммарный дипольный момент единицы объема диэлектрика, то есть вектор поляризации  $\mathbf{P}$  не равен нулю в отсутствие поля. При не очень больших деформациях вектор поляризации пропорционален механическому напряжению. Особое значение имеет обратный пьезоэффект, то есть, если диэлектрик в электрическом поле, то он должен деформироваться. Обратный пьезоэффект используется для получения звуковых волн высокой частоты. То есть как звуковой излучатель.

#### Классификация диэлектриков с выделением обычных и особых диэлектриков.



Схема 5. Классификация диэлектриков

**Пироэлектрики** – у них возникают связанные заряды на поверхности, то есть возникает поляризация на поверхности при изменении температуры. Пироэлектрик обладает постоянной самопроизвольной поляризацией, связанной с несимметричным расположением положительных и отрицательных ионов в кристалле. При изменении температуры изменяется поляризация диэлектрика, то есть появляется дополнительная поляризация.

*Примечание.* Явление электрострикции следует отличать от обратного пьезоэффекта. Общее у них то, что появляется механическая деформация под действием электрического поля. При этом электрострикция проявляется в любом диэлектрике и ее величина пропорциональна  $E^2$ . Обратный пьезоэффект бывает только в пьезоэлектриках и пропорционален  $E$ .

**Сегнетоэлектрики** – это диэлектрики, обладающие спонтанной поляризацией. Для них характерна петля гистерезиса как у ферромагнетиков. То есть так же есть понятие коэрцитивные силы, то есть величина обратного электрического поля, которая уничтожает поляризацию диэлектрика. Сегнетоэлектрики, как и ферромагнетики, при некоторой температуре, называемой температурой Кюри теряют сегнетоэлектрические свойства и превращаются в парамагнетик. Объясняется свойство сегнетоэлектриков, как и ферромагнетиков, наличием доменной структурой, то есть существуют некоторые области, в пределах которых, собственные электрические моменты ориентированы одинаково. Если наложить электрическое поле, то домены стремятся ориентироваться по полю, а поскольку дипольный момент доменов большой, то и вектор поляризации большой, то есть большие  $\pi$  до десятков тысяч. Если поле убрать, то деполяризация происходит медленно, потому что домены массивные, обладают большой инерцией и их разупорядочивание происходит медленно.

Почему возникает доменная структура в диэлектриках (и в магнетиках)? Это является следствием нескольких свойств макроскопических физических систем, в которых есть хаотическое движение и в которых частицы обладают электрическим (или магнитным) моментом. Всякая физическая система стремится в равновесное состояние. Равновесное состояние – это состояние с минимальной потенциальной энергией. Если есть два диполя с дипольными моментами  $\mathbf{p}$ , то электрическое поле одного диполя действует на другой диполь, возникает потенциальная энергия взаимодействия. Она является величиной отрицательной

$$W = -\vec{E}\vec{B} \cdot \cos\alpha.$$

Минимальная потенциальная энергия будет, когда диполи параллельны, то есть взаимодействие диполей стремится к тому, чтобы повернуть их друг к другу. Но параллельно ориентированные диполи создают большое результирующее поле  $\mathbf{E}$ , которое складывается по принципу суперпозиции. Энергия этого поля  $\sim E^2$  и таким образом появляется эффект, приводящий к возрастанию энергии системы.

#### 4.2 Диэлектрические потери. Пробой диэлектрика

Пробой диэлектрика является частным случаем явления, известного в физике и технике как пробой электрический. Под электрическим пробоем в общем случае понимается общее название различных по физической природе процессов, которые приводят к резкому возрастанию электрического тока. В среде, которая или неэлектропроводна или слабоэлектропроводна.

При рассмотрении распространения электромагнитных волн в диэлектриках отмечается, что в идеальных диэлектриках волны распространяются без поглощения. В действительности часть энергии переменного электрического поля в диэлектрике переходит в тепло. Эту часть энергии называют диэлектрическими потерями. Полные потери энергии в диэлектрике складываются из потерь проводимости, соответствующих постоянному напряжению, и из потерь, обусловленных активной слагающей тока смещения в диэлектрике. Потери проводимости являются следствием того, что электропроводность диэлектриков не равна нулю. В любом реальном диэлектрике есть свободные носители заряда, которые приходят в движение под действием электрического поля, создавая ток проводимости с выделением джоулева тепла. Эта часть энергетических потерь не входит в понятие диэлектрических потерь.

Под диэлектрическими потерями имеется ввиду часть энергии переменного электрического поля  $\vec{E}$ , которая преобразуется в теплоту при реполяризации диэлектрика. Когда изменяется направление  $\vec{E}$ , диполи должны переориентироваться в соответствии с направлением поля. Но такая переориентация связана с упорядоченным движением связанных зарядов и, следовательно, создает ток, который должен сопровождаться потерями на джоулево тепло. Любые движения частиц в веществе связаны с диссипацией части энергии, то есть с превращением энергии упорядоченного движения в энергию хаотического движения. Величина «сил трения» и, следовательно, диссипативные потери тем больше, чем больше скорость частиц. А это означает, что диэлектрические потери зависят от частоты изменения вектора  $\vec{E}$ . Если поляризация диэлектрика происходит за счет малых смещений электронов и ионов, то диэлектрик можно рассматривать как совокупность гармонических осцилляторов, которые под действием переменного внешнего электрического поля  $\vec{E}$  совершают вынужденные колебания. Амплитуда таких колебаний, а, следовательно, и потери энергии на эти колебания зависят от соотношения частоты ( $\omega$ ) изменения внешнего поля и собственной частоты ( $\omega_0$ ) осциллятора. Диэлектрические потери будут

максимальны при условии резонанса ( $\omega = \omega_0$ ). Если  $\omega$  и  $\omega_0$  различаются значительно, то диэлектрические потери становятся небольшими. Область частот, на которые приходится максимум диэлектрических потерь в значительной степени зависит от механизма поляризации диэлектрика. При электронном механизме поляризации максимум потерь приходится на оптические частоты порядка  $10^{15}$  Гц. А в области электротехнических и радиотехнических частот диэлектрические потери в таких диэлектриках ничтожно малы. Если поляризация в основном обусловлена смещением ионов, то максимум потерь приходится на инфракрасный диапазон  $10^{12}$ - $10^{13}$  Гц. Если механизм поляризации ориентационный, то максимуму потерь соответствуют еще меньшие частоты. Если период колебаний внешнего поля меньше, чем время необходимое для выстраивания дипольных моментов вдоль поля, поляризация почти не успевает устанавливаться и при этом диэлектрические потери малы. При низких частотах, т.е. большом периоде колебаний поляризация успевает следовать за полем, смещения частиц велики, но из-за больших величин времени смещения диэлектрические потери также малы. Максимальные потери наблюдаются при наложении переменного поля, период которого примерно равен времени релаксации, т.е. времени установления ориентации молекул. Для воды, где поляризация в основном ориентационная, период  $T \sim 10^{-10}$  с. Диэлектрические потери количественно характеризуются величиной тангенса угла диэлектрических полей  $tg \delta$ . Здесь  $\delta$  – угол между векторами поляризации диэлектрика и напряженности внешнего электрического поля. В быстропеременных электромагнитных полях существенную роль для каждого материала имеет отношение активной составляющей тока к реактивной составляющей. Это отношение представляет собой тангенс диэлектрических потерь ( $tg \delta$ ). Чем меньше  $tg \delta$ , тем в большей мере состояние материала приближается к диэлектрическому. Диэлектрические потери зависят от механизма поляризации диэлектрика. В переменном поле электронная поляризация изменяется практически без запаздывания вплоть до частот  $10^{15}$  Гц. Поэтому диэлектрические потери в веществах с чисто электронной поляризацией очень малы. Упругая ионная поляризация до частот инфракрасной области спектра не зависит от частоты и не вносит вклада в диэлектрические потери при радиотехнических частотах.

Реальные диэлектрики обладают конечной (не нулевой) электрической проводимостью, с ее наличием также связана часть диэлектрических потерь. При низких частотах джоулевы потери, связанные с проводимостью могут оказаться значительными, т.к. их величина не равна нулю при  $\omega \rightarrow 0$ . Если диэлектрические потери обусловлены только проводимостью, то  $tg \delta = \frac{4\pi\sigma}{\omega}$   $\sigma$  –электропроводность.

*Плотность диэлектрических потерь, то есть потери энергии в единице объема диэлектрика определяются формулой  $p = \omega E^2 \varepsilon tg \delta$ , где  $E$  – эффективное значение напряженности поля,  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость диэлектрика. Величину  $\varepsilon \cdot tg \delta$  называют фактором диэлектрических потерь. В диэлектриках с чистой электронной поляризацией дипольные потери очень малы,  $tg \delta \sim 10^{-5}$ - $10^{-4}$  не зависит от частот вплоть до  $10^9$  Гц и практически не зависит от температуры. В диэлектриках с релаксационной поляризацией угол диэлектрических потерь имеет температурный и частотный максимум. С ростом частоты температурный максимум сдвигается в сторону высоких частот. При увеличении температуры частотный максимум сдвигается в сторону высоких частот.*

**Пробой в газообразных диэлектриках** – это газовый разряд. При обычных условиях электропроводность газов не равна нулю. В газе имеются свободные электроны и ионы, которые создаются внешней радиацией, но их концентрация не велика. Соответствует электропроводности  $10^{15}$ - $10^{16}$  Ом<sup>-1</sup>·см<sup>-1</sup>. При этих условиях газ ведет себя как диэлектрик. Но в достаточно сильных электрических полях ионы и электроны на длине свободного пробега приобретают кинетическую энергию, достаточную для ионизации молекул газа. При этом образуются новые электроны и ионы, которые в свою очередь создают ионизацию. В газе нарастает лавина электронов. Соппротивление газа падает.

Электрическая прочность **жидких диэлектриков** обычно больше, чем газообразных. Механизм пробоя жидкостей зависит от загрязнения примесями. Если в основной жидкости содержится жидкая примесь с большим  $\varepsilon$  (например вода), то пробоем предшествует образование проводящего канала между электродами. Капли воды под действием электрического поля поляризуются, растягиваются, сливаются и при достаточно сильном поле образуют канал с большой проводимостью. При этом выделяется большое количество теплоты, жидкость закипает и возникает газовый разряд вдоль парового канала. Образование проводящих мостиков и вскипание жидкости может быть и в случае твердых примесей. Газовые примеси в жидкости в виде мельчайших пузырьков создают пробой,

связанный с разогревом жидкости при прохождении тока. В этом случае образуется газовый канал, который пробивается. Электрическая прочность технических жидкостей в однородном внешнем поле порядка  $10^5 \text{ В/см}$ , то есть она примерно в 10 раз выше прочности воздуха при тех же условиях. Если жидкость очищена от примесей, то пробой возникает в результате ударной ионизации подобно газам. Количественная теория пробоя жидкостей очень сложна. Электрическая прочность очень чистых жидкостей  $10^6 \text{ В/см}$ .

**Пробой твердых диэлектриков.** В диэлектрике всегда есть небольшое количество свободных зарядов, которое при наличии электрического поля создает ток очень малой величины. В сильных электрических полях этот ток не подчиняется закону тока, он возрастает по экспоненте, а затем резко увеличивается до очень больших значений. Большие токи приводят к разрушению материала. После снятия напряжения диэлектрические свойства в большинстве случаев не восстанавливаются.

Различают две формы пробоя твердого диэлектрика: тепловая и электрическая. Тепловая: при повышении напряжения увеличивается количество тепла, выделяемого в диэлектрике, повышается температура, при этом по экспоненте увеличивается электропроводность. Поэтому повышение температуры вызывает увеличение тока. Стационарное состояние возможно до тех пор, пока тепловыделение компенсируется теплоотводом. Температура диэлектрика возрастает до момента разрушения. В отличие от теплового пробоя электрический является нарушением не теплового равновесия диэлектрика, а нарушением стационарного режима электропроводности в результате двух основных механизмов, которые приводят к резкому увеличению концентрации носителей тока при  $E = E_{np}$ : туннельный переход носителей из электродов, валентной зоны или примесных уровней в зону проводимости кристалла, второй механизм ударная ионизация электронами. Туннельный переход бывает редко, обычно пробой  $p - n$  переходов в полупроводниках, а в диэлектриках обычно происходит ударная ионизация.

Таким образом, диэлектрические потери, то есть потери энергии электромагнитного поля в диэлектрике, тесно связаны с особенностями структуры диэлектрика, электрическими свойствами молекул, атомов или ионов. Поэтому возможность учета этих потерь связана с пониманием поведения конкретного диэлектрика в электрическом поле, механизмов его поляризации. Широкое использование диэлектриков на практике является основанием для включения в содержание обучения рассмотренных выше вопросов.

### 4.3 Классификация вещества по поведению во внешнем магнитном поле. Молекулярные токи

Все вещества, оказавшись в магнитном поле, изменяют свое состояние и изменяют поле, в котором они помещены. Вещества намагничиваются и сами становятся источниками магнитного поля. Результирующее поле будет равно векторной сумме внешнего и собственного полей. В этом смысле все вещества называют магнетиками. Намагниченность магнетика определяет величина, равная отношению магнитного момента магнетика к его объему  $\vec{J}_m = \frac{M}{V}$ . Намагниченность является векторной величиной, характеризующей магнитное состояние вещества. Зная намагниченность в каждой точке тела, можно определить создаваемое этим магнетиком магнитное поле. Отношение намагниченности к индукции поля называют магнитной восприимчивостью  $\chi$ . Это безразмерная величина:

$$\frac{J_m}{B} = \chi.$$

Намагниченное тело, находясь во внешнем поле, создаёт своё собственное поле, которое в изотропных магнетиках может быть направлено либо параллельно, либо антипараллельно внешнему полю. Если индукция внешнего поля  $B_0$ , собственного поля  $B_i$ , то для однородных магнетиков  $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_i$ , где  $\vec{B}$  - индукция результирующего поля.  $\vec{B}_i = \vec{J}_m = \chi \vec{B}_0$ , тогда  $\vec{B} = \vec{B}_0 + \chi \vec{B}_0 = (1 + \chi) \vec{B}_0$ . Обозначим  $1 + \chi = \mu$ , величина  $\mu$  - называется магнитной проницаемостью магнетика, она определяется по формуле:  $\mu = \frac{B}{B_0}$ . Магнитная проницаемость

показывает, во сколько раз магнитная индукция в среде больше, чем магнитная индукция в вакууме:

$$\vec{B} = \mu \vec{B}_0 = \mu \mu_0 \vec{H}.$$

По своему поведению во внешнем магнитном поле магнетики можно разделить на классы: диамагнетики, парамагнетики, ферромагнетики, антиферромагнетики, ферримагнетики и ферриты.

**Диамагнетики** это вещества, у которых величина  $\chi < 0$  и составляет  $-(10^{-5} - 10^{-6})$ . Отрицательная величина магнитной восприимчивости означает то, что данные вещества намагничиваются в направлении противоположном направлению внешнего поля, вследствие чего, выталкиваются из области более сильного поля в направлении ослабления поля, то есть в направлении, противоположном градиенту. У диамагнетиков величина магнитной восприимчивости  $\chi$  не зависит ни от температуры  $T$ , ни от напряженности  $H$ . К диамагнетикам относятся *Ge, Si, Ag, Cu*, инертные газы.

**Парамагнетики** — это вещества, которые намагничиваются в направлении поля и втягиваются в область максимальной напряженности. Магнитная восприимчивость парамагнетиков  $\chi > 0$  и составляет  $+(10^{-5} - 10^{-6})$  и зависит от температуры по закону Кюри:  $\chi = c/T$ , где  $c = const$  парамагнетика или постоянная Кюри.

В сильных полях намагниченность парамагнетика стремится к некоторому предельному значению. К парамагнетикам относятся  $O_2, NO, Pt$ , соли металлов.

**Ферромагнетики** — это вещества, у которых магнитная восприимчивость  $\chi > 0$ , как у парамагнетиков, но в отличие от них велика, составляет  $10^2 - 10^3$  и зависит от напряженности (индукции) магнитного поля. К ферромагнетикам относятся железо, кобальт, никель, тербий, ряд сплавов. Ферромагнетики обладают остаточной намагниченностью.

Таблица 2. Классификация веществ по поведению во внешнем магнитном поле

Диамагнетики	$\chi = \mu - 1$	Парамагнетики	$\chi = \mu - 1$	Ферромагнетики	$\chi = \mu - 1$
Висмут . .	$-18 \cdot 10^{-5}$	$FeCl_2$ . . . .	$360 \cdot 10^{-5}$	Железо . .	1000
Германий . .	$-0,8 \cdot 10^{-5}$	$CaO$ . . . .	$580 \cdot 10^{-5}$	Никель . .	150
Кремний . .	$-0,3 \cdot 10^{-5}$	$NiSO_4$ . . . .	$120 \cdot 10^{-5}$	Кобальт . .	240
Медь . .	$-0,9 \cdot 10^{-5}$	Платина . .	$26 \cdot 10^{-5}$		

По поведению магнетиков в магнтном поле различают соответствующие механизмы намагничивания: диамагнитный (диамагнетизм), парамагнитный (парамагнетизм), ферромагнетизм, антиферромагнетизм, ферримагнетизм. Обратим внимание на то, является ли однозначной связь терминологии механизмов намагничивания с терминологией магнетика. Например, тождественны ли понятия диамагнитный механизм намагничивания и диамагнетик или парамагнитный механизм намагничивания и парамагнетик? Ответ: нет, за исключением диамагнетика. Как будет показано ниже, диамагнитный механизм намагничивания есть во всех веществах, а диамагнетиком является вещество, у которого этот механизм намагничивания является единственным. Диамагнитный механизм намагничивания самый слабый. Если есть парамагнитный механизм намагничивания, то диамагнитный механизм его незначительно ослабляет, но вещество ведет себя как парамагнетик, это же относится и к ферромагнетикам. Диамагнитный механизм намагничивания связан с внутриатомными процессами. Поэтому он не зависит от температуры.

Принадлежность магнетика к диамагнетикам или парамагнетикам можно легко обнаружить экспериментально.

Экспериментально определяют  $\mu$  или  $\chi$  для данного магнетика при разных температурах. Если полученные значения  $\chi$  и  $\mu$  не изменяются с изменением температуры и очень малы, то это диамагнетик. Если они изменяются с изменением температуры, то это парамагнетик.

Ферромагнетики, как и парамагнетики намагничиваются по полю. То есть у них  $\chi$  больше нуля, следовательно  $\mu$  больше 1, но у них  $\mu$  много больше 1. То есть они создают собственное поле значительно более сильное, чем внешнее магнитное поле. Кроме того, у них  $\chi$  и зависят от  $\vec{H}$ . Таким образом, намагничиваясь диамагнетики приобретают собственный магнитный момент, вследствие

чего создают собственное магнитное поле. Диамагнетик и парамагнетик создают слабые поля. Собственное поле диамагнетика  $B_i$  направлено против внешнего поля  $B_0$ , поэтому он ослабляет поле. У парамагнетика поля сонаправлены, он усиливает поле. Ферромагнетик  $B_i$  по полю, но только оно даже сильнее внешнего поля, которое его создало.

Диамагнетик выталкивается из области сильного поля в область слабого поля. А парамагнетик втягивается в область сильного поля. Это тоже позволяет отличить экспериментально диамагнетик от парамагнетика [2].

**Идея существования молекулярных токов и ее обоснование в классической физике.** Свойства вещества обусловлены различными причинами, в том числе существованием спина. В классической физике нет характеристики аналогичной спину. Поэтому механизм явлений, в том числе магнитных, обусловленных существованием спина, в ней рассматриваться не может. В рамках классической физики в 1820 году Ампером была выдвинута гипотеза, объяснявшая магнитные свойства вещества. Это гипотеза о существовании молекулярных токов (круговые токи в молекулах). Когда магнетик не намагничен, он не создает магнитного поля, так как молекулярные токи расположены хаотично и в сумме их действие равно нулю. При намагничивании магнетика молекулярные токи становятся упорядоченными, то есть направленными частично или полностью в одну сторону. Таким образом, намагниченный магнетик можно представить в виде системы упорядоченных токов. Каждый молекулярный ток в магнетике обладает магнитным моментом. Сумма магнитных моментов молекулярных токов определяет магнитный момент магнетика в целом.

В классической электронной теории происхождение молекулярных токов объясняется тем, что квазиупругая сила, действующая на связанный электрон, способна вызывать колебания электрона, которые можно считать гармоническими, пренебрегая затуханием вследствие лучистого трения. Электрон может участвовать одновременно в двух таких взаимно перпендикулярных колебаниях с одинаковой угловой частотой  $\omega_0$ . Это приводит к движению электрона по эллипсу, иногда по окружности, с периодом обращения  $\tau = \frac{2\pi}{\omega_0}$ . Центр эллипса или окружности совпадает с положением равновесия электрона. Усреднение орбитального движения электрона с зарядом  $-e$  по физически бесконечно малому промежутку времени, большому по сравнению с  $\tau$ , объясняет существование тока, циркулирующего внутри молекулы  $\vec{j} = \frac{e}{\tau}$ , который направлен противоположно движению электрона.

По определению магнитный момент  $M$  линейного тока  $J$ , охватывающего площадь  $S$ , равен  $M = JS$ . Далее устанавливается связь между средней плотностью молекулярных токов и намагниченностью, в предположении, что токи одинаковые и круговые. Выбирается некоторое произвольное направление оси  $x$  в веществе (рис. 4.1). Нормаль  $\vec{n}$  проводится к плоскости каждого тока и образует правовинтовую систему с направлением тока. Магнитный момент каждого тока  $M_k$  совпадает по направлению с этой нормалью.

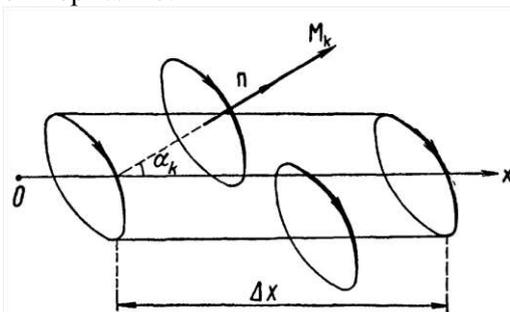


Рисунок 4.1 Молекулярные токи вокруг оси  $x$

Рассмотрим токи, у которых угол между нормалью и осью  $x$  близок к значению  $\alpha_k$ . Количество таких токов обозначим  $N_k$ . Ось  $x$  окружена токами, которые лежат в объеме круглого цилиндра с поперечным сечением  $S|\cos\alpha_k|$ . Объем такого цилиндра длиной  $\Delta x$  равен  $\Delta V = S|\cos\alpha_k|\Delta x$ . Число токов в данном объеме будет  $N_k\Delta V = N_k S|\cos\alpha_k|\Delta x$ . Образованный ими суммарный ток  $J_k$  вокруг оси  $x$  можно выразить через молекулярный ток  $J$ :  $J_k = J N_k S \cos\alpha_k \Delta x$ . Полный ток  $J$  вокруг оси  $x$  на отрезке  $\Delta x$ :

$$\Delta J = J S \Delta x \sum_k N_k \cos \alpha_k.$$

Для каждого молекулярного тока, заменим  $M$  на  $M_k$ , получим

$$\Delta J = \Delta x \sum_k N_k (\overline{M_k \vec{i}}),$$

где  $\vec{i}$  – единичный вектор по оси  $x$ . Заменив  $\Delta x \vec{i}$  на  $\Delta \vec{l}$ , можно записать ток, окружающий отрезок  $d\vec{l}$  и образующий правый винт с направлением  $d\vec{l}$ ,

$$d\vec{J} = d\vec{l} \sum_k N_k \overline{M_k}.$$

$\sum_k N_k M_k$  представляет собой суммарный магнитный момент токов единицы объема, то есть вектор намагниченности  $\vec{I}$ . Таким образом, получают  $d\vec{J} = (\vec{i} d\vec{l})$ .

Рассмотрим площадку внутри магнетика (рис. 4.2).

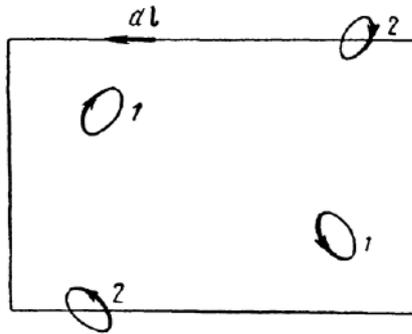


Рисунок 4.2 К вычислению усредненной плотности молекулярных токов

Молекулярный ток, который не охватывает контур выбранной площадки, не влияет на общий ток через площадку. наоборот суммарный ток, проходящий через площадку создают молекулярные токи, которые охватывают контур площадки (токи типа 2 на рисунке). Выбрав направление обхода контура против часовой стрелки и применив к каждому участку  $d\vec{l}$  соотношение  $d\vec{J} = (\vec{i} d\vec{l})$ , получают суммарный ток, проходящий через площадку и образующий правовинтовую систему с направлением обхода контура:

$$\oint_l (\vec{i} d\vec{l}),$$

где интеграл берется по всему замкнутому контуру. Если обозначить усредненную по физически бесконечно малому объему плотность молекулярных токов через  $\vec{j}_{\text{мол}}$ , то

$$J = \int_S (\vec{j}_{\text{мол}})_n dS,$$

где  $S$  – элемент площадки,  $(\vec{j}_{\text{мол}})_n$  – нормальная составляющая вектора  $\vec{j}_{\text{мол}}$  к площадке. По теореме Стокса, связывающей циркуляцию вектора по некоторому замкнутому контуру  $l$  с потоком ротора этого вектора через поверхность  $S$ , охватываемую этим контуром

$$\oint_l (\vec{i} d\vec{l}) = \int_S \text{rot}_n \vec{I} dS.$$

Данное равенство справедливо для произвольно выбранного контура любой площадки. Поэтому можно записать

$$(\vec{j}_{\text{мол}})_n = \text{rot}_n \vec{I}.$$

Так как направление нормали  $n$  может быть каким угодно, то справедливо следующее соотношение:  $\vec{j}_{\text{мол}} = \text{rot } \vec{I}$ .

Орбитальное движение связанных электронов атома сопровождается существованием не только магнитного момента  $\vec{M}$  молекулярного тока, но и орбитального механического момента, то есть момент импульса электрона  $\vec{L} = [\vec{r}, m\vec{u}] = m[\vec{r}\vec{u}]$ . При движении под действием квазиупругой силы, которая направлена к положению равновесия, механический момент  $\vec{L} = \text{const}$ .

Согласно определению секториальной скорости:

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2} \left[ \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{d\vec{l}}{dt} \right] = \frac{1}{2} [\vec{r}\vec{u}],$$

где  $d\vec{l}$  – элемент пути электрона, получают

$$\vec{L} = 2m \frac{d\vec{S}}{dt} = \text{const}.$$

При нерелятивистском движении, то есть движении со скоростью значительно меньшей скорости света, масса остается постоянной. Учитывая справедливость равенства  $\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{\vec{S}}{\tau}$ , получим для механического момента электрона в атоме получим выражение

$$\vec{L} = 2m \frac{\vec{S}}{\tau}$$

где вектор площади  $\vec{S}$  образует правовинтовую систему с радиусом-вектором  $\vec{r}$  и направлением скорости движения электрона.

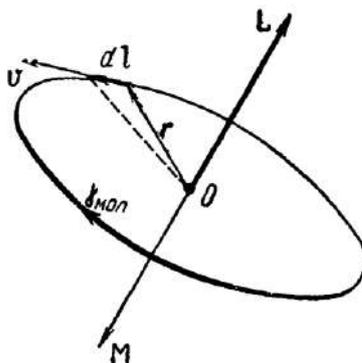


Рисунок 4.3 К определению магнитного и механического моментов молекулярного тока

Векторы  $\vec{L}$  и  $\vec{M}$  антипараллельны, поскольку направление магнитного момента  $\vec{M}$  образует правый винт с направлением тока. Учитывая все вышесказанное, получим

$$\frac{M}{L} = \frac{e}{2m} \quad \text{так, что} \quad \vec{M} = -\frac{e}{2m} \vec{L}.$$

Таким образом классическая теория намагничивания объясняет возможность существования молекулярных токов в частицах вещества. Взаимнопротивоположные направления механического и магнитного моментов электрона в атоме является следствием отрицательного заряда электрона.

#### 4.4 Механизм намагничивания диамагнетиков и парамагнетиков

Диамагнетиками являются вещества, у которых диамагнитный механизм намагничивания является единственным. Диамагнитный механизм намагничивания является общим для любого вещества. Но поскольку этот механизм очень слабый, то при наличии других механизмов намагничивания, его проявление мало заметно. Магнитные свойства вещества определяются основным механизмом взаимодействия.

С точки зрения классической физики, подтверждающей возможность существования молекулярных токов Ампера можно объяснить различие диамагнетиков и парамагнетиков. Эти токи могут быть внутри молекулы скомпенсированы и тогда молекула не обладает магнитным моментом, а могут быть не скомпенсированы, и тогда молекула обладает собственным магнитным моментом. По представлениям классической физики диамагнетики - это вещества, молекулы которых не обладают собственным магнитным моментом. А диамагнитный механизм намагничивания состоит в том, что, оказавшись во внешнем магнитном поле, электроны под действием силы Лоренца приобретают вращательное движение, с частотой Лоренца, или ее называют ларморовой угловой частотой. То есть возникает подобие замкнутого тока, следовательно, система приобретает магнитный момент и создает собственное магнитное поле. Этот диамагнитный механизм проявляется во всех атомах и молекулах, так как такое вращение возникает всегда, когда атом попадает в магнитное поле. Рассмотрим данный механизм подробнее. Рассмотрим электроны, связанные в атоме. Они вращаются по круговой траектории радиуса  $r$ , а это значит, что на них действует центробежная сила, которая определяется по формуле:  $F_0 = m \frac{v^2}{r} = m\omega_0^2 r$ , где  $\omega_0$  - частота вращения электрона по круговой орбите, такую частоту можно назвать **собственной частотой**. Поместим вещество в магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$ , перпендикулярной к плоскости орбиты. На электрон начнёт действовать сила Лоренца, определяемая по формуле:  $\vec{F}_L = q[\vec{v}_0 \vec{B}_0] = e\vec{\omega}_0 \vec{r} \vec{B}_0$ , эта сила направлена вдоль радиуса орбиты. В результате действия силы Лоренца, скорость электрона изменяется и становится равной  $\vec{v} = [\vec{\omega} \vec{r}]$  и электроны будут вращаться по орбите с некоторой частотой  $\omega$ . Тогда центробежная сила станет равной:

$$\vec{F}_{цб} = m\omega^2 \vec{r} = m\omega_0^2 \vec{r} + e\vec{\omega}_0 \vec{r} \vec{B}_0.$$

Преобразуем формулу, сократив на  $r$ :  $m(\omega^2 - \omega_0^2) = e\omega_0 B_0$ , далее получим  $m(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) = e\omega_0 B_0$ . В достаточно слабых полях  $\omega \approx \omega_0$ , тогда  $\omega + \omega_0 = 2\omega_0$ , преобразуем формулу  $m(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) = e\omega_0 B_0$  и получим:  $m(\omega - \omega_0)2\omega_0 = e\omega_0 B_0$ , или  $m\omega - m\omega_0 = \frac{eB_0}{2}$ .

Из последней формулы выразим частоту  $\omega$ :  $\omega = \omega_0 + \frac{eB_0}{2m}$ .

Выражение  $\omega_L = \frac{eB_0}{2m}$ , эта частота называется **ларморовой угловой частотой**.

Мы видим, что изменившаяся частота  $\omega$  зависит только от индукции внешнего поля и не зависит от радиуса орбиты, и от скорости движения электрона по орбите. По направлению ларморовская частота совпадает с направлением индукции  $\vec{B}$ . Если вектор магнитной индукции не перпендикулярен плоскости орбиты, то возникает дополнительное движение электрона вокруг поля  $\vec{B}$ , это движение налагается на орбитальное движение. Поэтому вектор механического момента, перпендикулярный к плоскости орбиты движения электрона, будет описывать в пространстве конус. Такое движение называется **прецессией** орбиты вокруг поля.

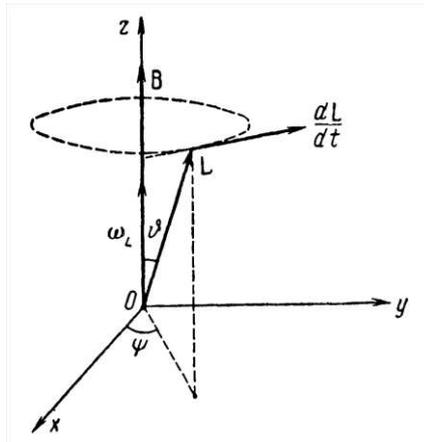


Рисунок 4.4 Прецессия механического момента электрона в магнитном поле

Это дополнительное движение электронов (прецессия) создает дополнительный круговой ток. Таким образом, электрон приобретает дополнительный индуцированный магнитный момент, который согласно правилу Ленца направлен противоположно внешнему полю. Появление этого магнитного момента обуславливает намагничивание тела в направлении противоположном полю, присущее диамагнетикам. Именно прецессия в магнитном поле ослабляет внешнее магнитное поле, а ослабление внешнего магнитного поля это есть **диамагнетизм**. Рассчитаем магнитный момент, создаваемый за счет диамагнетизма. По определению:  $\vec{M} = -IS\vec{n}\mu_0$ , где  $S$  - площадь контура, который описывает электрон вследствие прецессии вокруг поля напряжённости  $\vec{H}$ :  $S = \frac{2}{3}\pi r^2$ , а  $r$  - среднее расстояние электрона от ядра; сила тока  $I$  может быть записана, через произведение электрического заряда на частоту вращения, в нашем случае частота вращения это **ларморовская частота**, тогда:  $I = e \frac{\omega_L}{2\pi}$ . Получим:  $M = -\frac{e\omega_L \frac{2}{3}\pi r^2 \mu_0}{2\pi} = -\frac{e^2 B_0 r^2 \mu_0}{6m}$ .

Если учесть, что в атоме  $z$  электронов, то магнитный момент, связанный с прецессией определится как:  $M = -\frac{ze^2 B_0 r^2 \mu_0}{6m}$ . Определим намагниченность создаваемую  $N$  атомами вещества за счёт прецессии по формуле:

$$J_m = N \frac{M}{V} = -\frac{ze^2 B_0 r^2 \mu_0}{V 6m} N = -\frac{ne^2 B_0 r^2 \mu_0}{6m},$$

где  $n$  - число атомов в единице объёма.

Магнитная восприимчивость  $\chi = -\frac{ne^2 r^2 \mu_0}{6m}$ .

Таким образом, диамагнетизм возникает вследствие изменения орбитального движения электронов под действием внешнего магнитного поля. Диамагнетизм присущ всем без исключения веществам. Но особенность диамагнетиков заключается в том, что в отсутствии внешнего поля, магнитные моменты электронов компенсируются и суммарный орбитальный и спиновый момент равен нулю.

В металле, помимо связанных электронов, существуют свободные электроны, не вращающиеся по круговой орбите вокруг ядра, а принадлежащие кристаллу в целом. Свободные электроны образуют электронный газ. Явление диамагнетизма свободных электронов рассматривал Ландау в 1930 году. Если бы не было магнитного поля, то свободные электроны двигались в металле по

прямой линии, но действие магнитного поля искривляет траекторию. Это и приводит к появлению диамагнетизма. Этот вид диамагнетизма называют **диамагнетизмом свободных электронов** [2].

**Механизма намагничивания парамагнетиков.** Классическую теорию парамагнитного намагничивания рассмотрел Ланжевен в конце 19 века. Он ввел характеристику  $\eta = \frac{MB}{kT}$ . Здесь в числителе - модуль энергии взаимодействия магнитного момента  $M$  с внешним магнитным полем, в знаменателе - средняя энергия хаотического движения частиц в макросистеме. Частицы парамагнетика обладают собственным магнитным моментом и в отсутствии внешнего магнитного поля, но в следствие хаотического движения и столкновений, эти моменты хаотически ориентированы и результирующее собственное поле парамагнетика равно нулю. Если магнетик оказывается во внешнем поле, то энергия взаимодействия равна:  $W = -MB \cdot \cos\alpha$ ,  $M$  – магнитный момент,  $\alpha$  – угол между магнитным моментом и индукцией магнитного поля. Поле стремится ориентировать магнитные моменты по полю, но этому препятствует хаотическое тепловое движение. То есть в парамагнетике существует два конкурирующих процесса: поле стремится упорядочить магнитные моменты, а столкновение частиц ведет к их хаотической ориентации. В результате устанавливаются некоторые преобладающие направления (рис. 4.5).

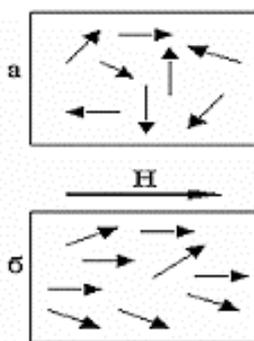


Рисунок 4.5 Собственные магнитные моменты парамагнетика, а) в отсутствии внешнего поля, б) во внешнем магнитном поле

Чем сильнее внешнее поле, тем больше степень упорядоченности при той же температуре. И чем выше температура, тем меньше упорядоченность магнитных моментов при том же  $\vec{B}$ . Таким образом, в общих чертах классическая теория может объяснить явление парамагнетизма.

Но не было ответа на вопрос, почему ориентация магнитных диполей в магнитном поле не может быть произвольной, почему магнитные явления являются следствием движения электрических зарядов. Ответы на данные вопросы были даны в квантовой теории парамагнетизма. Оказалось, что парамагнетики это, как правило, вещества у которых атомы и молекулы с нечетным числом электронов, то есть полный орбитальный и спиновый магнитный момент у таких веществ не равен 0. Парамагнетиками также могут быть элементы с недостроенными внутренними оболочками (щелочные металлы, окись азота, молекулярный кислород и так далее). У парамагнетиков собственный магнитный момент молекул и атомов не равен 0, а суммарный магнитный момент вещества в целом равен нулю, так как происходит их взаимная компенсация. Намагниченность парамагнетиков зависит от температуры и от напряженности магнитного поля по закону Кюри:

$\chi = \frac{C}{T}$ .  $C$  - постоянная Кюри, зависит от концентрации атомов в веществе и пропорциональна

напряженности магнитного поля. Чем больше напряженность внешнего магнитного поля, тем сильнее в нём намагничивается парамагнетик, то есть тем больше число диполей ориентируется по полю. Магнитные моменты атомов в магнитном поле ориентируются не произвольным образом, а согласно квантовомеханическим представлениям,  $(2J + 1)$  способами, где  $J$  - внутреннее

квантовое число. Из формулы  $\chi = \frac{C}{T}$  следует, что парамагнитная восприимчивость пропорциональна абсолютной температуре, но у целого ряда металлов был обнаружен парамагнетизм, не зависящий от температуры. Объяснение этого парамагнетизма было дано Паули в 1927 году. Паули определил, что он вызван магнитными моментами, связанными со спинами электронов проводимости. Поэтому его назвали **парамагнетизмом свободных электронов**. С точки

зонной теории, металлы имеют зону проводимости частично занятую электронами. На каждом уровне расположено по два электрона с противоположно ориентированными спинами. Зону проводимости можно представить, как две полужоны: одна из них содержит электроны со спинами направленными вверх, а другая содержит электроны, у которых спины направлены вниз. В отсутствие внешнего поля, число тех и других электронов одинаково, и поэтому суммарный магнитный момент равен нулю. В магнитном поле энергетические уровни электронов со спинами, совпадающими с направлением внешнего магнитного поля, опускаются вниз, а энергетические уровни электронов, у которых спины ориентированы против поля, поднимаются вверх. Возникающая разность энергий приводит к тому, что электроны из второй полужоны начинают перетекать в первую, это будет происходить до тех пор, пока верхние уровни полужон не сравняются. После установления равновесия металл приобретает магнитный момент, направленный вдоль магнитного поля, так как число электронов, у которых спины ориентированы по полю больше, чем число электронов, у которых спины направлены против поля. Парамагнетизм свободных электронов в три раза превышает их диамагнетизм. Парамагнетизм свободных электронов обуславливает слабый, не зависящий от температуры, парамагнетизм щелочных металлов [2].

**Механизм намагничивания диа- и пара магнетиков в квантовой теории.** С точки зрения современной квантовой нерелятивистской физики магнитный момент атома или молекулы можно вычислить, решая уравнение Шредингера для частицы, находящейся в магнитном поле. При этом оказывается, что магнитный момент может быть представлен двумя слагаемыми  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_1 \neq \mathbf{B}_0, \mathbf{M}_2 \sim \mathbf{B}_0$ . С точки зрения современной физики электрон в атоме обладает орбитальным магнитным моментом. В полуклассическом приближении, то есть в принятии теории Бора, если считать, что электрон вращается по орбите, то этому движению можно сопоставить ток  $I = \frac{q}{t} = \frac{e}{T}$ .  $\mathbf{M} = I\mathbf{S}$ , если  $S$  – эллипс, то  $\mathbf{S} = \int d\mathbf{S} = \int \frac{1}{2} [\vec{r} \cdot d\vec{r}] = \frac{1}{2m} \int_0^T [\vec{r} \cdot m\vec{v}] dt = \frac{LT}{2m}$ . Тогда магнитный момент  $\mathbf{M} = -\frac{eL_z}{2m} \cdot \frac{M}{L} = -\frac{e}{2m} \mathbf{g}$  – гиромангнитное отношение. Таким образом, отсюда видно, что  $\mathbf{M} \sim L, \vec{M} \uparrow \vec{L}$ .

С точки зрения квантовой механики орбиты у электрона в атоме не существуют, но определение магнитного момента электрона при решении уравнения Шредингера для  $\Psi$  функции дает ту же формулу для магнитного момента электрона в атоме:  $\vec{M} = -\frac{e\vec{L}}{2m}$ . Различие в том, что по классическим законам векторы  $\vec{L}$  и  $\vec{M}$  могут принимать любые значения, а в квантовой механике  $\vec{L}$  квантована. В квантовой механике магнитный момент создает только проекция  $L_z$ .  $L_z = m\hbar$  – квантовано. Далее согласно современной физике электрон обладает собственным магнитным моментом. Конечный вывод совпадает с выводами классической физики. Если все орбитальные и собственные или спиновые магнитные моменты скомпенсированы в атоме или молекуле, то  $\mathbf{M}_1 = \mathbf{0}$ . А  $\mathbf{M}_2$  не равно нулю, только когда есть внешнее магнитное поле. Это вещество диамагнетик. Если же внутри молекулы или атома орбитальные и собственные магнитные моменты не скомпенсированы, то молекула обладает результирующим магнитным моментом и создает собственное магнитное поле не зависимо от наличия внешнего поля. Второе слагаемое добавляется во внешнем поле [2].

#### 4.5 Ферромагнетики, антиферромагнетики, ферримагнетики

Ферромагнетизм – явления, которые проявляются только в твердой фазе и у ограниченного круга веществ, называемыми ферромагнетиками. К ферромагнетикам относятся переходные элементы железа (26), никель (28), (3д-металлы), кобальт (27), некоторые редкоземельные металлы (например, гадолиний (64), тербий (65), диспрозий (65), гольмий (67), эрбий (68), а также сплавы и соединения в составе которых есть алюминий. Ферромагнетики отличаются от других веществ высокой магнитной восприимчивостью и отсутствием линейной зависимости между намагниченностью и напряженностью (или индукцией) внешнего магнитного поля, что указывает на зависимость от внешнего поля магнитной восприимчивости. Для ферромагнетиков характерно также **остаточная намагниченность**. (Диамагнетики и пара- очень быстро размагничиваются при выключении поля).

Механизм намагничивания ферромагнетиков рассматривался в период доквантовой (классической) физики. Из-за сходства их с парамагнетиками (намагничивание по полю, зависимость от температуры) можно было предположить, что в ферромагнетике так же существуют элементы с собственным магнитным моментом, но эти моменты значительно больше магнитного момента одной частица. То есть этот элемент должен быть с большой инертностью, чтобы долго сохранять

намагниченность. Была выдвинута гипотеза о том, что в ферромагнетике существуют особые намагниченные области – **домены**. Каждый домен состоит из большого количества атомов или молекул. В пределах каждого домена ориентация магнитных моментов частиц одинакова, а магнитные моменты самих доменов ориентированы хаотически. И таким образом в целом в ферромагнетике  $M = 0$ . Взаимодействие магнитного момента домена с внешним магнитным полем сопровождается уменьшением потенциальной энергии взаимодействия в соответствии с законом

$$W = -HM\cos\alpha, \quad W = -BM\cos\alpha$$

Взаимодействие приводит к тому, что магнитные моменты доменов стремятся к ориентации по направлению поля. Хаотическое движение столкновения доменов препятствует этому. В результате устанавливается преимущественная ориентация, ферромагнетик намагничивается. А поскольку магнитный момент каждого домена большой, то большим будет и суммарный магнитный момент магнетика. Поэтому намагниченный ферромагнетик создает сильное магнитное поле. Кроме того, согласно современной теории намагничивание ферромагнетика идет не только за счет ориентации доменов, но и за счет того, что домены с полем, направление которого близко к направлению внешнего поля, увеличиваются в размерах, а домены с противоположным направлением собственного поля уменьшаются (рис. 4.6).

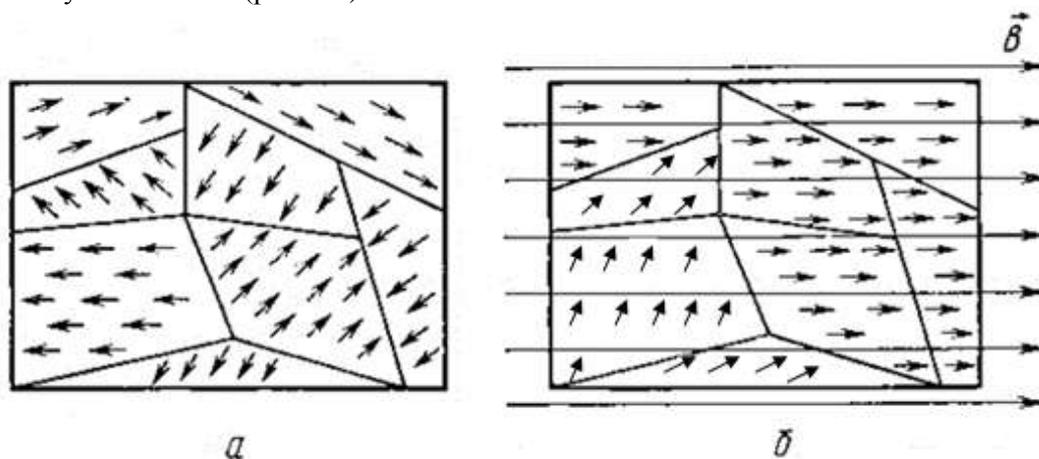


Рисунок 4.6 Доменная структура ферромагнетика, а) без внешнего поля, б) во внешнем магнитном поле

Что заставляет магнитные моменты атомов группироваться в домены и почему в основном не однодоменная структура? За счет чего все это создается?

Явление ферромагнетизма обусловлено наличием у электрона собственного магнитного момента, которому нет аналогов в классической физике. Поэтому достаточно строгой теории ферромагнетизма, как отмечено выше, в классической физике нет. Для объяснения особенностей намагничивания ферромагнетика предполагалось, что кроме внешнего магнитного поля на намагничивание влияет некоторое внутреннее магнитное поле, которое называется молекулярным полем Вейсса. Теория Вейсса позволила объяснить наличие остаточной намагниченности и существование критической температуры (точка Кюри), выше которой вещество теряет свои ферромагнитные свойства. Расчеты показали, что для обеспечения наблюдаемой намагниченности ферромагнетика для молекулярного поля получается величина порядка  $10^6$  эрстед. Эта величина на три порядка превышает напряженность которую магнитный момент атома может создать в узле кристаллической решетки. Эксперименты, которые провел в 1927 году советский физик Я.Г.Дорфман, показали, что высокой напряженности магнитного поля в ферромагнетиках нет. Если бы такое поле было, то проходящие через тонкую ферромагнитную фольгу электроны заметно отклонялись бы силой Лоренца. Опыты показали, что отклонение электронов незначительно. Теория Вейсса является значительным этапом в исследовании ферромагнетизма, но она не объясняет природу существования внутреннего молекулярного поля в веществе.

Квантовая теория ферромагнетизма опирается на существование спина, собственного магнитного момента электрона и существование обменного взаимодействия электронов. Решение вопроса о природе ферромагнетизма было дано в 1928 году советским физиком Я.И. Френкелем и

немецким физиком Гейзенбергом, одним из создателей квантовой механики. Оно опирается на особенности Кулоновского взаимодействия двухэлектронной системы с учетом волновых свойств частиц. Такое взаимодействие рассматривается в теории атома гелия, состоящего из ядра и двух электронов или молекулы водорода, состоящей из двух атомов, в каждом из которых по одному электрону. Вычисляется энергия молекулы, которая складывается из энергии кулоновского взаимодействия каждого электрона со своим ядром, электронов между собой и других видов взаимодействий, в том числе магнитного. В системе двух электронов (фермионов) волновая функция должна быть антисимметричной. При слабом спиноорбитальном взаимодействии волновую функцию можно представить как произведение двух функций: координатной и спиновой. Чтобы произведение было антисимметричной функцией один из сомножителей должен быть симметричным, другой антисимметричным, то есть у сомножителей должен быть разный характер симметрии.

Задача решается методом возмущений (метод последовательных приближений). В нулевом приближении энергия атома определяется как сумма энергии кулоновского взаимодействия электронов с ядром пренебрегая всеми остальными видами взаимодействия. Это означает, что энергия каждого электрона и его волновая функция совпадают с энергией одноэлектронного атома. Решение уравнения Шредингера позволяет найти энергию и волновую функцию. Это координатная часть волновой функции для системы двух электронов, учитывая принцип тождественности квантово-механических частиц, составляется симметричная и антисимметричная функций. Спиновая функция зависит от взаимной ориентации спинов взаимодействующих электронов: она симметричная, если спины ориентированы одинаково, и антисимметрична при взаимно противоположной ориентации спинов.

Энергия кулоновского взаимодействия электронов между собой в первом приближении учитывается как поправка к энергии нулевого приближения. Эта поправка вычисляется как среднее значение энергии взаимодействия усредненной по состоянию нулевого приближения. При этом полученный результат оказывается отличным от классического вычисления кулоновской энергии взаимодействия. Его можно представить в виде

$$E_1 = K + A,$$

если координатная функция симметричная, а спиновая- антисимметричная (спины ориентированы взаимно противоположно, суммарный спин  $S = 0$ , следовательно, и суммарный магнитный момент). В случае антисимметричной координатной функцией и симметричной спиновой ( $S \neq 0$ , не равен нулю и суммарный магнитный момент)

$$E_2 = K - A.$$

Величины  $K$  и  $A$  представляют собой некоторые интегралы. Интеграл  $K$  называют кулоновским интегралом. Его значение совпадает с энергией кулоновского взаимодействия, вычисленной по классическим законам.

Для рассмотрения ферромагнетизма значения имеет интеграл  $A$ , который называется обменным и представляется в виде

$$A = \int \psi_a^*(1)\psi_b(1)V_{12}\psi_a(2)\psi_b^*(2)d\vec{r}_1 d\vec{r}_2.$$

Здесь  $V_{12}$  – потенциал кулоновского взаимодействия двух электронов, номера 1 и 2- номера электронов,  $a$  и  $b$  обозначения ядер атомов. Волновая функция электронов, получаемая из решения уравнения Шредингера, оказывается отличной от нуля во всей области пространства за исключением отдельных точек. С удалением от ядра она быстро, по экспоненте, убывает. Но если ядра достаточно близко друг другу, то  $\Psi$  - функция каждого электрона отлична от нуля во всей области молекулы, поэтому имеет смысл говорить о том, что каждый электрон принадлежит обоим ядрам. В твердом теле это соответствует модели локализованных электронов, то есть электронов, входящих в состав ионов, образующих узлы кристаллической решетки. Таким образом, в формуле обменного интеграла  $a$  и  $b$  - соседние ионы. Интеграл называется обменным, как видно из формулы, в связи с тем, что соседние атомы (ионы) обмениваются электронами. Соответствующая энергия называется обменной энергией. Обменная энергия не представляет собой особый вид энергии. Это часть энергии кулоновского взаимодействия, на которую результаты квантовых расчетов отличаются от классических. Это слагаемое в формуле кулоновской энергии является следствием принадлежности электрона к классу фермионов. Следовательно, это следствие существования спина. Аналога спину в

классической физике нет, поэтому появление в расчетах обменной энергии - чисто квантовый результат.

В теории ферромагнетизма используется формула энергии взаимодействующих атомов, которые определяются формулой,

$$U = 2E_0 + \frac{K \pm A}{1 \pm S^2}.$$

Здесь  $E_0$  – энергия двух невзаимодействующих атомов водорода,  $K$  - энергия кулоновского взаимодействия зарядов, входящих в состав атомов, она отрицательная и по модулю меньше  $A$ .  $A$  - энергия обменного взаимодействия, она может быть как больше нуля, так и меньше нуля,  $S$  - интеграл неортогональности. Знак минус в формуле соответствует параллельной ориентации спинов, знак плюс антипараллельной ориентации спинов электронов, участвующих в взаимодействии. Оказалось, что знак обменной энергии  $A$  зависит от расстояния между атомами в кристаллической решётке.  $A > 0$ , если отношение диаметра атома  $d$  к диаметру не заполненной оболочки  $a$  больше 1,5

( $\frac{d}{a} \geq 1,5$ ),  $A < 0$ , если отношение диаметра атома к диаметру не заполненной оболочки меньше 1,5

( $\frac{d}{a} \leq 1,5$ ). При  $A$  больше нуля энергетически выгодной является параллельная ориентация спинов, при

$A$  меньше нуля энергетически выгодной является антипараллельная ориентация спинов. Таким образом, при  $A$  больше нуля и при параллельной ориентации спинов, возникает нескомпенсированный магнитный момент атомов, что приводит к спонтанной намагниченности, то

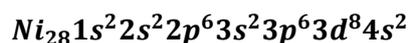
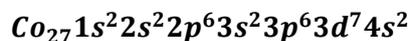
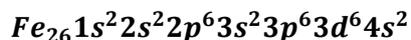
есть к ферромагнетизму. Но  $\frac{d}{a} \geq 1,5$  только у  $Fe, Ni, Co$ , поэтому они ферромагнетики, а у  $Mn$

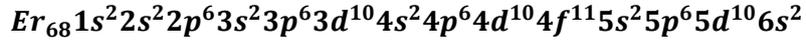
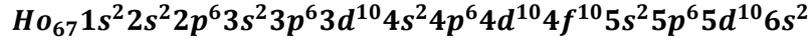
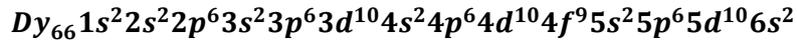
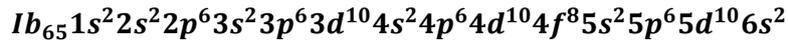
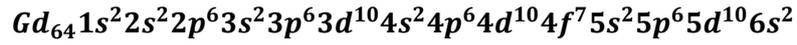
$\frac{d}{a} \leq 1,5$ , поэтому он не ферромагнетик (это все элементы с недостроенной  $3f$  оболочкой) [2].

Обменный интеграл, обменная энергия позволяют объяснить образование доменной структуры ферромагнетика, то есть возможность существования внутри него областей спонтанной намагниченности. Существование таких областей зависит от знака обменного интеграла. Известно, что всякая физическая система стремится в состояние равновесия, которому соответствует минимум потенциальной энергии во взаимодействии. Для того чтобы суммарный магнитный момент электронов был не равным нулю (параллельная ориентация спинов), состояние в системе соседних узлов решетки должно соответствовать энергии  $E_2$ . Минимуму величины  $E_2$  соответствует  $A > 0$ , то есть положительный обменный интеграл (примечание: в теории молекулы водорода связь атомов в молекуле обеспечивается отрицательным обменным интегралом).

Таким образом, с точки зрения квантовой механики условием ферромагнетизма является наличие положительного обменного интеграла между электронами, находящимися в соседних узлах кристаллической решетки. Расчеты показывают, что обменная энергия достаточно высока, что обеспечивает существование доменов до достаточно высоких критических температур Кюри. При температурах выше точки Кюри в конкуренции обменной энергии, обеспечивающей упорядоченность в направлении магнитных моментов, и теплового движения, создающего их дезориентацию, преобладает тепловое движение, за счет энергии которого упорядоченная структура разрушается.

Рассмотренные результаты получены в модели локализованных электронов, что, строго говоря, относится к ферромагнитным диэлектрикам, в которых нет свободных электронов. Все спины связаны с узлами кристаллической решетки. Но железо, никель, кобальт и ряд других ферромагнетиков являются металлами. Свойство металлов в значительной степени определяются свободными электронами, электронами проводимости. Рассмотрим структуру электронных оболочек некоторых ферромагнитных металлов.





Обратим внимание на то, что в структуре электронных оболочек ферромагнитных металлов не полностью заполнены  $d$  и  $f$  оболочки. Модели, учитывающие существование как локализованных, так и свободных электронов это  $[s - d(f)]$  - обменные модели. Они предполагают, что в металлах основную роль в ферромагнетизме играют электроны внутренних  $d$  и  $f$  атомных оболочек, а процессы переноса электрического заряда (электрический ток) осуществляется коллективизированными внешними  $s$  электронами, имеющими обменную связь с  $d(f)$  электронами. Теория основанной на этой модели достаточно хорошо объясняет ферромагнетизм металлов и их сплавов.

Доменная структура является важнейшим свойством ферромагнитных тел. Размеры доменов велики по сравнению с молекулярными. В состав домена входит большое число частиц. Если тело не подвергалось намагничиванию, то магнитные моменты доменов ориентированы хаотично, так, что суммарный магнитный момент равен нулю. Очень маленькие твердые тела могут иметь однодоменную структуру. Рассмотрим причину, по которой твердое тело не оказывается однодоменным, а ориентация образовавшихся магнитных моментов доменов хаотическая. Это также связано со свойством физической системы: равновесному состоянию соответствует минимум потенциальной энергии взаимодействия. Когда в результате обменного взаимодействия образуется домен, он создает сильное магнитное поле. Следовательно, уменьшение потенциальной энергии взаимодействия частиц внутри домена приводит к увеличению энергии системы за счет энергии магнитного поля домена. Теперь для выполнения условия минимума энергии системы необходимо уменьшение магнитного поля. Поэтому формируется доменная структура, таким образом, чтобы магнитные моменты доменов были ориентированы хаотически, так что суммарный магнитный момент ненамагниченного ферромагнетика равен нулю. Под действием внешнего магнитного поля возникает преимущественная ориентация доменов по полю и увеличение размеров доменов, магнитный момент которых ориентирован по полю и уменьшение размеров доменов, ориентированных противоположно внешнему полю.

В заключение более подробно рассмотрим намагничивание и размагничивание ферромагнетика [2; 3].

В начальном состоянии, то есть в отсутствии магнитного поля ферромагнетик не намагничен. Во внешнем магнитном поле не равные нулю магнитные моменты доменов начинают ориентироваться по полю. Чем больше величина напряжённости внешнего поля, тем больше намагниченность ферромагнетика, возрастает преобладание проекций магнитных моментов на направление магнитного поля по сравнению с противоположной ориентацией.

Вначале намагниченность растёт очень быстро. Затем число не сориентированных магнитных моментов постепенно уменьшается. В связи с этим уменьшается рост  $J_m$  от  $H$ . При некотором значении внешнего поля намагниченность достигает своего максимума, то есть наблюдается насыщение, **все магнитные моменты ориентированы по полю** (состояние насыщения).

Рассмотрим, как будет проходить намагничивание и перемагничивание ферромагнетика. В экспериментах было установлено, что намагниченность зависит от предыстории намагничивания и образуется некоторое запаздывание  $J_m$  от  $H$ . Это явление запаздывания назвали **гистерезисом**. Если первоначально ферромагнетик не был намагничен, то есть он находился в состоянии 0 (рис.4.7), в начале координат. С увеличением  $H$  происходит намагничивание ферромагнетика по линии 0 - 1, увеличивается индукция  $B$ . В точке 1 наблюдается максимум намагниченности, то есть явление **насыщения**. С уменьшением  $H$  начинается размагничивание, которое проходит вдоль кривой 1 - 2, а не вдоль кривой 1 - 0. Когда напряжённость внешнего поля  $H = 0$ , индукция  $B \neq 0$ , то есть уменьшение индукции отстаёт от уменьшения напряжённости. Ферромагнетик сохраняет

**остаточную намагниченность  $B_{ост}$ .** Для того чтобы убрать остаточную намагниченность необходимо приложить внешнее поле, но уже противоположного направления, относительно первоначального. Размагничивание идет вдоль линии 2 - 3. В точке 3 ферромагнетик полностью размагничен, но для того чтобы его размагнитить, оказалось необходимым создать внешнее поле  $H_k$ . Напряженность  $H_k$  внешнего магнитного поля, при котором ферромагнетик оказывается размагниченным, называется **коэрцитивной силой** (обратить внимание на то, что термин «сила» в данном случае не совпадает с понятием силы, введенным в механике как характеристики действия одного тела на другое и измеряемой в ньютонах).

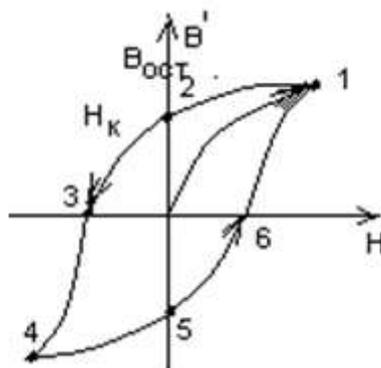


Рисунок 4.7 Петля гистерезиса

Коэрцитивная сила (напряженность поля) по величине может быть различной в зависимости от того, какой это ферромагнетик. По величине коэрцитивной силы ферромагнетики делятся на **жесткие** и **мягкие**. К **жестким** относятся ферромагнетики с большой коэрцитивной силой в несколько тысяч ампер на сантиметр. К ним относятся, например, углеродистая и вольфрамовая сталь. Из таких сталей делают постоянные магниты. Если коэрцитивная сила маленькая, несколько ампер на сантиметр, то такой ферромагнетик называется **мягким**. Примером такого магнетика является сплав железа с никелем. Мягкие ферромагнетики используются в условиях, когда необходимо их быстрые перемагничивания. Такие условия имеют место в цепях переменного тока, в которых важная роль принадлежит трансформаторам, сердечники для которых изготавливают из мягких ферромагнетиков. Такие ферромагнетики используются также в конструкции электромагнитов.

Если продолжить увеличивать напряженность магнитного поля, противоположного направления относительно первоначального (кривая 3 - 4), то при  $H = -H_{нас}$ , достигается насыщение (точка 4). При уменьшении  $H$ , индукция уменьшается по кривой 4 - 5 и в точке 5, при  $H = 0$ , индукция становится равной  $-B_{ост}$ . При перемене напряженности поля на противоположное и постепенном его увеличении, индукция растёт по кривой 5-6 - 1, и в точке 1, возвращается в первоначальное состояние **технического насыщения**. На этом завершается полный цикл перемагничивания. Полученная кривая перемагничивания называется **петлей гистерезиса (запаздывания)**. Площадь петли гистерезиса пропорциональна работе перемагничивания  $1 м^3$  ферромагнетика. Эта работа полностью переходит в тепло, поэтому ферромагнетик нагревается. Процесс намагничивания ферромагнетиков сопровождается изменением его линейных размеров и объема. Это явление называется **магнитоstrictionей**.

Поликристаллы и монокристаллы намагничиваются неодинаково. Поликристаллы изотропны, поэтому их намагниченность не зависит от направления магнитного поля. Монокристаллы ферромагнитных веществ обладают анизотропией намагничивания. Их намагниченность зависит от направления магнитного поля. Направления, в которых наиболее легко происходит намагничивание, то есть достигается насыщение при меньшей напряженности магнитного поля, называются направлениями **лёгкого намагничивания**. Например, для железа это [100], для никеля [111]. Наиболее трудно происходит намагничивание для железа вдоль направления [110] и [111], для никеля вдоль направления [110] и [100]. Любой ферромагнетик характеризуется температурой, которая называется температурой Кюри, точкой Кюри. При этой температуре ферромагнетик полностью теряет свои свойства, становится парамагнетиком. Переход из ферромагнитного состояния в парамагнитное относится к переходам второго рода, то есть не сопровождается изменением объема и тепловыми эффектами [3].

Известно, что магнитная восприимчивость парамагнетика обратно пропорционально температуре. В 20 - 30-х годах были обнаружены соединения (окислы и хлориды **Mn, Fe, Co, Ni**),

обладающие иным видом зависимости  $\chi(T)$ , чем у парамагнетиков. У этих соединений на кривых  $\chi(T)$  наблюдались максимумы (рис. 4.8, кривые бв и бг). Ниже температуры максимума была обнаружена сильная зависимость  $\kappa$  от ориентации кристалла в магнитном поле. Были обнаружены острые максимумы кривых температурной зависимости удельной теплоёмкости этих веществ. Эти экспериментальные факты указывали на перестройку внутренней структуры вещества при определенной температуре.

В 1930-х годах Л. Д. Ландау и французский физик Л. Неель объяснили указанные выше аномалии переходом парамагнетика в новое состояние, названное антиферромагнитным.

Антиферромагнетизм - это магнито упорядоченное состояние вещества, при котором магнитные моменты соседних частиц вещества-носителей магнетизма ориентированы навстречу друг другу (антипараллельно). Поэтому намагниченность тела в целом в отсутствие магнитного поля равна нулю. Этим антиферромагнетизм отличается от ферромагнетизма, при котором одинаковая ориентация всех атомных магнитных моментов приводит к высокой намагниченности тела.

Структуру антиферромагнетика можно представить, как систему вставленных друг в друга пространственных решёток магнитных ионов, в узлах каждой из которых находятся параллельные друг другу магнитные моменты. В антиферромагнетике каждая подрешётка состоит из магнитных ионов одного сорта. Суммарные магнитные моменты подрешёток компенсируются, поэтому антиферромагнетик в целом в отсутствие внешнего поля не имеет результирующего магнитного момента. Под действием внешнего магнитного поля антиферромагнетики подобно парамагнетикам приобретают слабую намагниченность. Для магнитной восприимчивости  $\chi$  антиферромагнетиков типичны значения  $10^{-4}$  —  $10^{-6}$ . На рисунке 4.9 показана схема подрешёток.

Вещества, в которых установился антиферромагнитный порядок магнитных моментов атомов или ионов называют **антиферромагнетиками**. Обычно вещество становится антиферромагнетиком ниже определенной температуры  $T_N$  и остаётся антиферромагнетиком вплоть до  $T = 0K$ . Из элементов к антиферромагнетикам относятся: твёрдый кислород, хром - антиферромагнетик с геликоидальной структурой),  $\alpha$  - марганец, а также ряд редкоземельных металлов.

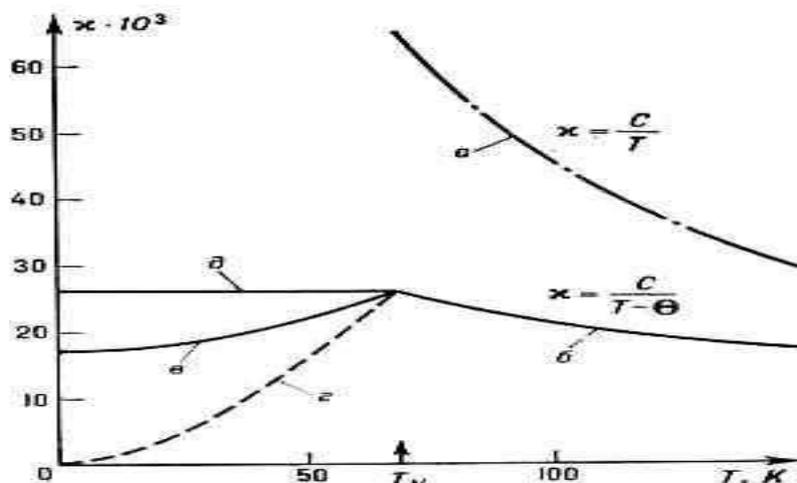


Рисунок. 4.8 Температурная зависимость магнитной восприимчивости  $\chi$ :

- а — для парамагнетика, не претерпевающего перехода в упорядоченное состояние вплоть до самых низких температур ( $\chi = C/T$ , где  $C$  — константа);
- б — для парамагнетика, переходящего в антиферромагнитное состояние при  $T = T_N$  ( $\theta < 0$  — константа вещества);
- в — для поликристаллического антиферромагнетика;
- г — для монокристаллического анти-ферромагнетика вдоль оси лёгкого намагничивания ( $\chi_{\parallel}$ );
- д — для монокристаллического антиферромагнетика в направлениях, перпендикулярных оси лёгкого намагничивания ( $\chi_{\perp}$ ).

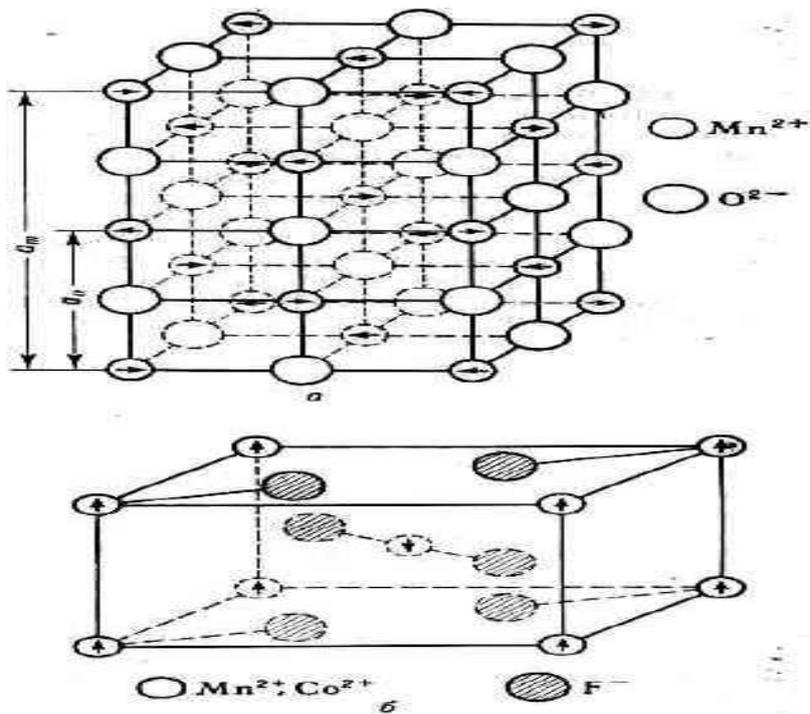


Рисунок 4.9 Магнитная структура: а — кубического антиферромагнетика **MnO** (период  $a_m$  магнитные структуры в два раза больше периода  $a_0$  кристаллической структуры); б — тетрагонального антиферромагнетика **MnF<sub>2</sub>** (или **CoF<sub>2</sub>**). Узлы с одинаковым направлением магнитных моментов образуют пространственную магнитную подрешётку.

Таблица 3. Свойства редкоземельных элементов— антиферромагнетиков [33, с. 31]

Элемент	$T_1$ , К	$T_N$ , К
Dy	85	179
Ho	20	133
Er	20	85
Tm	22	60
Tb	219	230

Таблица 4. Температура Нееля для некоторых простых антиферромагнетиков [33, с. 31]

Соединение	$T_N$ , К	Соединение	$T_N$ , К
MnO	120	MnF <sub>2</sub>	72
FeO	190	FeF <sub>2</sub>	250
CoO	290	CoF <sub>2</sub>	37,7
NiO	650	NiF <sub>2</sub>	73,2
MnSO <sub>4</sub>	12	MnCO <sub>3</sub>	32,5
FeSO <sub>4</sub>	21	FeCO <sub>3</sub>	35
CoSO <sub>4</sub>	12	CoCO <sub>3</sub>	18
NiSO <sub>4</sub>	37	NiCO <sub>3</sub>	25

Представление о том, что в антиферромагнетике действуют два эффективного магнитного поля, позволяет объяснить многие свойства, в том числе, поведение антиферромагнетика в переменных внешних магнитных полях. Изучение антиферромагнетизма внесло существенный вклад в развитие современных представлений о физике магнитных явлений. Расширены представления об обменном и других типах взаимодействия в магнетиках. Исследование антиферромагнетизма привело к обнаружению новых явлений: *слабый ферромагнетизм, пьезомагнетизм, магнето-электрический эффект, которые будут рассмотрены позднее.*

**Ферримагнетизм** – это явление, которому соответствует магнитоупорядоченное состояние вещества, такое, что магнитные моменты атомных носителей магнетизма образуют несколько *магнитных подрешёток* с магнитными моментами  $M_i$ , направленными навстречу друг другу или имеющими более сложную пространственную ориентацию. Самопроизвольная намагниченность вещества  $J_s$  наблюдается, если отлична от нуля векторная сумма намагниченностей подрешёток. Обычно подрешётки различаются тем, что содержат ионы различной валентности или ионы другого металла. Простейшая модель ферримагнитной упорядоченности вещества показана на рисунке 4.10.

Термин «ферримагнетизм» был введён французским физиком Л. Неелем (1948) и происходит от слова феррит - названия большого класса окислов переходных элементов, в которых это явление было впервые обнаружено. Ферримагнетизм устанавливается при температурах  $T$  ниже критической температуры Кюри  $\theta$ . Вещества, в которых установился ферримагнитный порядок, называют *ферримагнетиками*. Ферримагнетизм можно рассматривать как наиболее общий случай магнитного упорядоченного состояния. С этой точки зрения *ферромагнетизм* можно рассматривать как частный случай ферримагнетизма, когда в веществе имеется только одна подрешётка, *антиферромагнетизм* - частный случай ферримагнетизма, когда все подрешётки состоят из одинаковых магнитных ионов и  $J_s = 0$ .

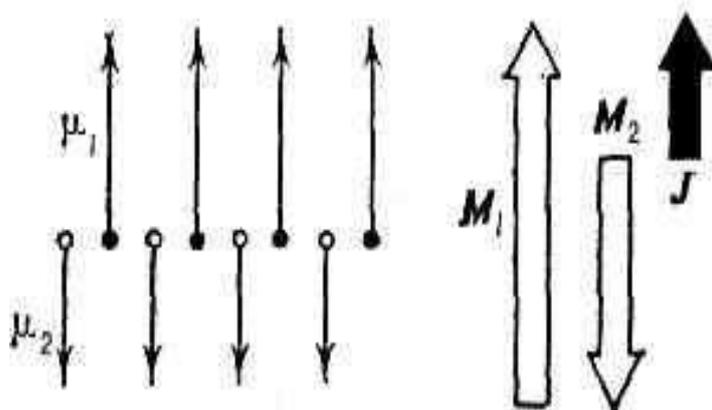


Рисунок 4.10 Схематическое изображение ферримагнитного упорядочения линейной цепочки магн. ионов разных сортов с элементарными магн. моментами  $\mu_1$  и  $\mu_2$ .  $M_1 = N\mu_1$  и  $M_2 = N\mu_2$  — магнитные моменты 1-й и 2-й подрешёток ( $N$  — число ионов данного сорта в единице объёма).

Суммарная намагниченность  $J = M_1 - M_2$ .

Вещество, в котором при температуре ниже *Кюри точки*  $T_c$  существует ферримагнитное упорядочение магнитных моментов ионов, называют **ферримагнетиками**. Значительная часть ферримагнетиков – это диэлектрические или полупроводниковые ионные кристаллы, содержащие магнитные ионы различных элементов или одного элемента. С этим связаны возможности их практического применения в ВЧ- и СВЧ-устройствах, так как в них ничтожно малы потери на *вихревые токи* в переменных электромагнитных полях даже очень высокой частоты. *К ферримагнетикам принадлежит ряд сплавов и интерметаллических соединений. Многие из таких соединений и сплавов содержат атомы редкоземельных элементов (R) и элементов группы железа (Me), каждый из которых образует свою магнитную подрешетку.*

Существование в ферримагнетике нескольких различных подрешёток приводит к более сложной температурной зависимости спонтанной намагниченности  $J$ , чем в обычном ферромагнетике. Это связано с тем, что зависимости  $J(T)$  для подрешёток могут различаться. В результате самопроизвольная намагниченность, являющаяся в простейшем случае разностью намагниченностей двух подрешёток, с ростом температуры от абсолютного нуля может изменяться

различным образом в зависимости от особенностей подрешеток, образующих данный ферромагнетик.

В заключение приведем краткую информацию о некоторых явлениях, связанных с ферромагнетизмом.

**Слабый ферромагнетизм** - существование небольшой спонтанной намагниченности у определенных классов антиферромагнетиков. Эта намагниченность может возникать в результате нестрогой антипараллельности векторов намагниченности магнитных подрешёток антиферромагнетика или в результате неравенства величин намагниченности двух антипараллельных подрешёток антиферромагнетика. Наиболее подробно слабый ферромагнетизм изучен в ромбоэдрических антиферромагнетиках ( $\alpha$  -  $Fe_2O_3$ ,  $MnCO_3$ ,  $NiCO_3$ ,  $CoCO_3$ ,  $FeBO_3$ ), в ортоферритах типа  $RFeO_3$  и ортохромитах  $RCrO_3$  ( $R$  — трёхвалентный ион редкоземельного элемента), в  $NiF_2$ . У всех известных антиферромагнетиков со слабым ферромагнетизмом обнаружен поперечный слабый ферромагнетизм. Экспериментально слабый ферромагнетизм наблюдался задолго до открытия антиферромагнетизма, в основном в гематите ( $\alpha$  -  $Fe_2O_3$ ); считалось, однако, что он обусловлен наличием примесей ферромагнитных окислов железа. Тот факт, что слабый ферромагнетизм наблюдается в химически чистых антиферромагнетиках (без ферромагнитных примесей), был установлен впервые для  $NiF_2$  в 1955 году, а для  $MnCO_3$  и  $CoCO_3$  в 1956 году.

Теоретическое объяснение слабого ферромагнетизма было дано И. Е. Дзялошинским в 1957 году, который показал, что существование слабого ферромагнетизма следует из самых общих представлений о магнитной симметрии кристаллов. Теория Дзялошинского, в частности, объясняет, почему в одноосных кристаллах слабый ферромагнетизм наблюдается, когда намагниченность подрешёток направлена перпендикулярно главной оси симметрии кристалла, и отсутствует, когда намагниченность параллельна этой оси. Эффективное магнитное поле, приводящее к слабому ферромагнетизму, получило название поля Дзялошинского. Оно в  $10^2$ — $10^4$  раз слабее эффективного поля обменного взаимодействия, обуславливающего намагниченность магнитных подрешёток кристалла.

**Пьезомагнетизм** – возникновение в веществе намагниченности под действием внешнего давления. Пьезомагнетизм может существовать только в антиферромагнетиках и принципиально невозможен в пара- и диамагнетиках. Пьезомагнетизм возникает, когда под действием приложенного давления симметрия магнитной структуры антиферромагнитного кристалла изменяется таким образом, что в нём появляется слабый ферромагнетизм. Намагниченность в образце возникает в результате схода магнитных подрешёток или относительного изменения величины их намагниченности. Пьезомагнетизм был экспериментально обнаружен в 1982 году лишь в трёх антиферромагнитных кристаллах:  $MnF_2$ ,  $CoF_2$  и  $\alpha$ - $Fe_2O_3$ .

**Магнитоэлектрический эффект** – возникновение в кристаллах намагниченности  $J$  при помещении их в электрическое поле  $E$  ( $J = \alpha E$ ). Магнитоэлектрический эффект возможен только в магнитоупорядоченных кристаллах (антиферро-, ферри- и ферромагнетиках). На возможность существования магнитоэлектрического эффекта указали впервые Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц в 1957 году. И. Е. Дзялошинский в 1959 году на основании данных о магнитной симметрии кристаллов предсказал, в каких из известных антиферромагнетиков должен наблюдаться магнитоэлектрический эффект. Экспериментально эффект был открыт Д. Н. Астровым в 1960 году в антиферромагнитном кристалле  $Cr_2O_3$ .

#### 4.6 Магнетизм свободных электронов

Проблема магнитных свойств свободных электронов связана с общей проблемой магнитных свойств вещества, которые могут иметь различную природу. Первыми в истории физической науки исследовались диамагнетики (во внешнем магнитном поле намагничиваются противоположно полю) и парамагнетики (намагничиваются по полю). Диамагнитные и парамагнитные свойства вещества принципиально различаются по характеру температурной зависимости. Исследование показали, что магнитная восприимчивость парамагнетиков обратно пропорциональна температуре, то есть с возрастанием температуры уменьшается, а магнитная восприимчивость диамагнетиков от температуры не зависит. Это является следствием различия механизмов намагничивания магнетиков различной природы, которое объясняется результатами решения уравнения Шредингера для атома, находящегося в магнитном поле. Магнитный момент атома оказывается состоящим из двух составляющих: собственный магнитный момент, определяемый суммой орбитального и спинового

моментов электронов атома и магнитный момент, приобретаемый атомом во внешнем магнитном поле:

$$\hat{M} = \hat{M}_z = -\frac{l}{m_e}(L_z + 2S_z) - \frac{e^2 B}{4m_e}(\hat{x}^2 + \hat{y}^2).$$

Парамагнитный механизм намагничивания является следствием наличия собственного магнитного момента атомов, которые во внешнем магнитном поле стремятся ориентироваться по направлению поля. Этому процессу препятствует хаотическое движение и взаимодействие частиц вещества, приводящие к дезориентации магнитных моментов. Намагничивание зависит от конкурирующего действия этих двух процессов. При возрастании температуры увеличивается роль хаоса, что затрудняет намагничивание парамагнетика.

Однако, были обнаружены парамагнетики (щелочные и щелочноземельные металлы), у которых магнитная восприимчивость оказалось не зависящей от температуры. Металл представляет собой кристаллическую решетку, в узлах которой находятся положительные ионы. Оторвавшиеся от атомов электроны образуют свободный электронный газ, обеспечивающий электропроводность металлов. Если атомы (ионы) металла не обладают магнитным моментом, то следовало предположить, что парамагнетизм таких металлов создают свободные электроны. Таким образом возникла проблема парамагнетизма свободных электронов, которую разработал Паули. В физической науке парамагнетизм свободных электронов называют парамагнетизмом Паули. Дальнейшие исследования показали, что свободные электроны металла могут вносить вклад и в диамагнитный механизм намагничивания. Диамагнитный механизм намагничивания свободных электронов в 1930 году предсказал Ландау, и в современной науке этот механизм намагничивания носит его имя.

Рассматривая проблему магнитных свойств свободных электронов следует обратить внимание на то, что с точки зрения классической физики магнитная восприимчивость электронов проводимости металла, то есть свободных электронов должна быть равна нулю. Этот результат обусловлен тем, что сила Лоренца, действующая на электрический заряд в магнитном поле, перпендикулярна к скорости электрона. Такая сила работы не совершает и, следовательно, не изменяет энергии электрона. Энергетический спектр электронов дискретный. Электроны подчиняются запрету Паули, поэтому распределены по энергетическим уровням. Магнитное поле, не изменяя энергии электронов, не изменяет их распределения по уровням энергии и магнитный момент оказывается равным нулю. Объяснить диамагнитные и парамагнитные свойства свободных электронов оказалось возможно только с учетом существования спина (собственный механический момент) и собственного магнитного момента электрона, аналога которым нет в классической физике. Наличие у электрона этих внутренних характеристик введено в нерелятивистский квантовой механике для обоснования результатов опыта Штерна и Герлаха, мультиплетной структуры спектров и некоторых других явлений. Поэтому магнитные свойства свободных электронов находят объяснения в квантовой теории.

Диамагнетизм свободных электронов обусловлен взаимодействием спина электрона с внешним магнитным полем. Он вызван Ларморовским движением (вращением) во внешнем магнитном поле, что создает магнитный момент. Парамагнетизм свободных электронов является результатом перераспределения электронов между энергетическими уровнями и вытекающим из этого нарушением равновесия собственных магнитных моментов. В эксперименте разделить диамагнетизм Ландау, то есть Ларморовский диамагнетизм, парамагнетизм Паули и ионный парамагнетизм представляют сложную задачу. Один из способов ее решения - ядерный магнитный резонанс [2].

**Диамагнетизм свободных электронов. Диамагнетизм Ландау.** Исследуя магнетизм свободных электронов, Л.Д. Ландау показал, что согласно квантовой теории внешнее магнитное поле изменяет распределение энергетических уровней. Таким образом, энергия электронов возрастает, что приводит к диамагнетизму. Энергетический спектр свободных электронов в магнитном поле определяется решением соответствующего уравнения Шредингера. Для уровней энергии получается выражение

$$E_n(k_z) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_c + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m},$$

где  $\omega_c = \frac{|e|H}{mc}$  – циклотронная частота,  $\hbar k_c = p_z$  – проекция импульса электрона на направление напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$ ;  $k_z$  – волновое число; квантовое число  $n$  принимает целые, неотрицательные значения ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ).

Для определения наличия магнитных свойств свободных электронов необходимо найти связь между намагниченностью (магнитным моментом) и внешним магнитным полем. У диамагнетика связь между этими величинами прямо пропорциональная. Отрицательный знак коэффициента пропорциональности показывает намагничивание вещества в направлении, противоположном внешнему магнитному полю. Этот коэффициент пропорциональности магнитная восприимчивость. Таким образом, задача сводится к нахождению связи намагниченности внешним магнитным полем. При решении диамагнитной восприимчивости: учитывается, что электроны являются фермионами; их совокупность описывается распределением Ферми-Дирака; используется термодинамический потенциал, который согласно статистике Ферми-Дирака:

$$\Phi = -k_B T \sum_{\alpha} \ln \left( 1 + e^{\frac{\xi - E_{\alpha}}{k_B T}} \right),$$

где  $\Phi$  – термодинамический потенциал, где  $\alpha$  – номер квантового состояния. Учитывая выражение энергетического спектра электронов в магнитном поле, получают для потенциала выражение:

$$\Phi = -k_B T \sum_n \sum_{\alpha} \ln \left[ 1 + e^{\frac{\xi - \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2}) - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}}{k_B T}} \right] g,$$

где  $g$  кратность вырождения уровня, которая выражается формулой:

$$g = \frac{|e|H}{\pi \hbar c} dk_z$$

Магнитный момент связан с термодинамическим потенциалом с соотношением

$$M = -\frac{\partial \Phi}{\partial H}.$$

Обратим внимание на то, что величина  $H$  в формуле потенциала содержится в выражении циклотронной частоты  $\omega_c$ . Выражение термодинамического потенциала представляет трудности вычисления производной. Оно выполняется с использованием некоторых допустимых ограничений и приближений. В результате для магнитного момента получают формулу

$$M = -\frac{1}{12\pi\hbar} \left( \frac{e}{mc} \right)^2 (2m)^{3/2} \xi^{3/2} H$$

При исследовании свободных электронов металла на основе статистики Ферми получен коэффициент

$$N(E) = \frac{m^*}{4\pi^3 \hbar^2 k} \int dS.$$

Тогда магнитный момент можно записать

$$M = -\frac{2}{3} \mu_B N_1(\xi) H,$$

где  $\mu_B$  – магнетон Бора,  $N_1(\xi)$  – плотность состояний у поверхности Ферми на одну проекцию спина.

Отсюда видно, что магнитная восприимчивость определяется выражением

$$\kappa_d = -\frac{2}{3}\mu_B N_1(\xi).$$

Отрицательный знак магнитной восприимчивости указывает на диамагнитный характер намагничивания свободных электронов в магнитном поле [29].

**Примечание.** «*О термодинамическом потенциале  $\Phi$* ». Известно, что термин «термодинамика» используется в двух смыслах. В первом - это раздел науки, в котором рассматриваются тепловые процессы. Во втором - как один из методов исследования макроскопических систем, то есть систем, состоящих из большого количества частиц. Термодинамический метод применим к исследованию не только тепловых процессов, но и электрических, магнитных и других. В основе термодинамического исследования физических явлений лежат основные законы (начала) термодинамики. Применение этих законов реализуется двумя способами. Один из этих способов-метод термодинамических потенциалов (метод характеристических функций). Этот метод был развит Гиббсом. Исходным для него является основное уравнение термодинамики, объединяющее первый и второй начала термодинамики,

$$TdS = dU + Ad\alpha.$$

Здесь  $S$  - энтропия,  $U$  - внутренняя энергия,  $A, \alpha$  - обобщенная сила и обобщенная координата, конкретный смысл которых зависит от исследуемого явления. В частности, при рассмотрении процессов в газах роль обобщенной силы играет давление  $p$ , обобщенной координаты - объем  $V$ . Обобщенные силы являются внутренними параметрами системы, обобщенные координаты- внешние параметры.

Основное уравнение термодинамики позволяют ввести функции состояния, которые и называются термодинамическими потенциалами, или характеристическими функциями. Таких функций несколько. Основные из них- четыре. Все они имеют смысл энергии. Три функций имеют собственные названия: внутренняя энергия, свободная энергия, энтальпия. Четвертую называют термодинамическим потенциалом Гиббса или энергией Гиббса. Его обозначают  $\Phi$  (или  $Z$ ). Какая из четырех функций является характеристической, зависит от того, какие параметры являются независимыми. Термодинамический потенциал Гиббса используется при условии, что независимыми параметрами являются температура  $T$  и обобщенная сила  $A$  (в частном случае давление  $p$ ), то есть  $\Phi = \Phi(T, A)$ .

Изменение термодинамических функций является полным дифференциалом. Свойства полного дифференциала позволяет получать уравнения, необходимые для исследования того или иного процесса, явления, определять параметры (характеристики) системы. Одно из таких уравнений

$$a = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial A}\right)_T.$$

Термодинамический потенциал Гиббса используется для теоретического обоснования диамагнетизма свободных электронов. Возникает вопрос: «Почему выбран именно этот потенциал?». Для ответа необходимо обратить внимание на то, какие величины, характеризующие систему, позволяют определить тот или иной потенциал при каких условиях. При исследовании магнитных свойств физической системы необходимо установить связь между намагничённостью магнетика, которую характеризует магнитный момент  $M$  единицы объема, и напряженностью  $H$  или индукцией  $B$  внешнего магнитного поля, вызывающего намагничивание. Если физическая система - газ, то потенциал Гиббса является характеристической функцией при условии, что независимыми параметрами являются температура  $T$  и давление  $p$ . При этом  $\Phi = \Phi(T, p)$ , а объем систем

$$V = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right)_T.$$

Для того, чтобы решить задачу намагничивания, необходимо найти соответствие между  $V$  и  $p$  с одной стороны,  $H$  и  $M$  с другой. В системе - обычный газ:  $V$  обобщенная координата " $\alpha$ ". Этому соответствует выражение элементарной работы, то есть внешний параметр,  $p$  - соответствует обобщенной силе  $A$ .

$$dW = AdadW = pdV.$$

Для нахождения в этих формулах места параметрам  $H$  и  $M$ , рассмотрим термодинамические потенциалы (характеристические функций) с точки зрения работы системы. Изменение каждого из них определяет работу системы при определенных условиях: изменение внутренней энергии определяет работу при адиабатных процессах, убыль свободной энергии-работу при изотермических процессах, убыль термодинамического потенциала оказывается равной работе так называемой расширенной системы при адиабатических процессах. В случае, когда системой является газ под поршнем, расширенная система - это газ с поршнем и грузом на нем. Энергия такой системы

$$E = U + pV,$$

где  $U$  - внутренняя энергия газа

$$dE = dU + d(pV) = dU + pdV + Vdp.$$

Но по первому и второму законам термодинамики:

$$dU + pdV = \delta Q \frac{\delta Q}{T} = dS.$$

Следовательно,  $\delta Q = TdS$

$$dU + pdV = TdS,$$

$$dE = TdS + Vdp.$$

Отсюда видно, что при адиабатном процессе (энтропия  $S = \text{const}$ ,  $dS = 0$ , если процесс обратимый) работа расширенной системы, равная убыли полной энергии  $E$  системы, определяется выражением:

$$dW_{\text{расш}} = -dE = -Vdp$$

Но  $dW = Adad$ . В простой системе – газ  $dW = pdV$ ,  $V = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)_T$ . Для нее соответствие имеет место в парах  $(A, p)$  и  $(a, V)$ , где объем  $V$  - внешний параметр. Выражение работы расширенной системы позволяет сделать вывод о соответствии в парах  $(A, -V)$  и  $(a, p)$ . Известно, что работа намагничивания магнетика

$$\delta W = -HdM.$$

Это соответствует параметрам  $(A, -H)$  или  $(p, -H)$ , и  $(a, M)$  или  $(V, M)$ . Отсюда получаем используемое при исследовании диамагнетизма Ландау соотношение

$$M = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial M}\right)_T.$$

Таким образом, использование термодинамического потенциала Гиббса для исследования магнитных свойств подтверждает значимость термодинамического метода потенциалов, который приводит к важным результатам не только применительно к классическим системам, но и к квантовым, описываемым квантовой статистикой Ферми-Дирака.

#### 4.7 Парамагнетизм свободных электронов. Парамагнетизм Паули

Парамагнетизм - это свойство веществ, помещенных во внешнее магнитное поле, намагничивается, приобретает магнитный момент, в направлении этого поля. Атомы парамагнетика обладают собственным магнитным моментом, который в магнитном поле стремится ориентироваться по полю. Этому препятствует хаотическое тепловое движение. Поэтому намагниченность

парамагнетика зависит от температуры в соответствии законом Кюри. Однако экспериментально было обнаружено, что намагниченность некоторых парамагнетиков не зависит от температуры. Это относится, например, к щелочным (химические элементы 1-й группы периодической таблицы элементов; литий, натрий, калий, рубидий, цезий, франций, унуненний) и щелочноземельным (химические элементы 2-ой группы периодической таблицы элементов: бериллий, магний, стронций, барий, радий и унбилий) металлам. У этих металлов магнитный момент электронных оболочек ионов полностью скомпенсирован. Следовательно ионы, магнитный момент которых создает парамагнетизм, у данных элементов парамагнетизма создавать не могут в следствии своего отсутствия. Парамагнетизм таких металлов может быть результатом только свойств свободных электронов.

Таким образом, независимость парамагнитной восприимчивости ряда металлов от температуры указывает на то, что в этих металлах парамагнетизм обусловлен электронами проводимости. При рассмотрении поведения свободных электронов в металлах необходимо учитывать наличие у них волновых свойств, то есть рассматривать их как квантово-механические частицы (а не классические). В квантовой теории, как и в классической, совокупность свободных электронов рассматривается как идеальный газ. Электроны, обладая полуцелым спином, относятся к классу фермионов, следовательно подчиняются квантовой статистике Ферми-Дирака

$$n_i = \frac{g_i}{e^{(\frac{\epsilon_i - \mu}{kT}) + 1}}$$

Парамагнетизм свободных электронов объяснил Паули. Известный принцип Паули для частиц с полуцелым спином запрещает в одном состоянии находится нескольким фермионам (или один, или ни одного). Следствием принципа Паули является то, что при  $T = 0\text{K}$  в отсутствие магнитного поля электроны заполняют не только нулевой энергетический уровень, но и все уровни энергии до некоторого максимального, который называется уровнем Ферми  $\xi$  (или  $\mu$ ). Соответствующее распределение электронов показано на рисунке (рис.4.11, а).

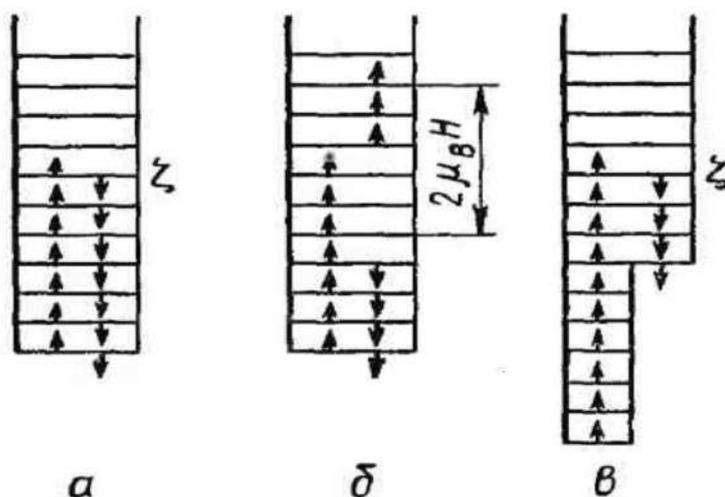


Рисунок 4.11 Распределение электронов

Наличие собственного механического момента (спина) у заряженной частицы сопровождается наличием собственного магнитного момента. Собственный магнитный момент электрона равен магнетону Бора ( $\mu_B$ ). Стрелками показаны собственные магнитные моменты электронов. Так как при этом в каждом состоянии находятся два электрона с противоположными проекциями спина, то магнитный момент системы равен нулю.

**Примечание.** Если система обладает магнитным моментом  $\mathbf{M}$  и находится в магнитном поле напряженностью  $\mathbf{H}$ , то ее потенциальная энергия  $U = -MH \cos \alpha$ , где  $\alpha$  – угол между направлениями магнитного момента и магнитного поля.

При включении магнитного поля электроны с положительной проекцией магнитного момента ( $\alpha = 0$ ,  $\cos \alpha = 1$  магнитные моменты ориентированы по полю) имеют потенциальную энергию

$$U_{\uparrow} = -\mu_B H,$$

а электроны с отрицательной проекцией магнитного момента ( $\alpha = 180^\circ$ ,  $\cos\alpha = -1$  магнитные моменты ориентированы против поля) имеют потенциальную энергию

$$U_{\downarrow} = \mu_B H$$

Систему с двумя электронами на энергетическом уровне можно рассматривать как совокупность двух подсистем с различной ориентацией магнитных моментов. В результате действия магнитного поля энергетические уровни электронов, магнитные моменты которых ориентированы по полю, опускаются, а с ориентацией противоположно полю, поднимаются. Но в равновесном состоянии верхний уровень электронов с различной ориентацией магнитных моментов должен быть одинаков, поэтому часть электронов с противоположной полю ориентацией спинов переходит в подсистему уровней с ориентацией магнитных моментов по полю. При этом происходит их переориентация. В результате электронов с магнитными моментами, ориентированными по полю, становится больше чем электронов с противоположной ориентацией спинов. Магнетик становится намагниченным по полю, создает собственное поле, совпадающее по направлению с внешним полем, то есть обладает свойством парамагнетизма.

При изменении отрицательной проекции магнитного момента на положительную проекцию потенциальная энергия понижается на величину (рис. 4.11, б)

$$U_{\uparrow} - U_{\downarrow} = -2\mu_B H.$$

Однако в состоянии, в котором уже находится электрон с положительной проекцией магнитного момента, согласно принципу Паули, не может перейти другой электрон с такой же проекцией магнитного момента. Переориентация магнитных моментов может происходить только путем перехода электронов проводимости на незаполненные уровни, энергия которых больше  $\xi$ . Такие переходы связаны с увеличением кинетической энергии электронов. Поэтому заполняются «перевернутыми» спинами только такие уровни, энергия которых отличается от первоначальной не более чем на  $2\mu_B H$  (рис.19 ,б).

В единице объема энергетическую область шириной  $2\mu_B H$  заполняют электроны с положительной проекцией магнитного момента, число которых определяется выражением

$$\Delta N = N_1(\xi) 2\mu_B H,$$

где  $N_1(\xi)$ - плотность состояний вблизи уровня Ферми на одну проекцию спина. Магнитный момент электронов проводимости равен

$$M = \mu_B \Delta N = 2N_1(\xi) \mu_B^2 H.$$

Магнитный момент (намагниченность магнетика) определяется формулой

$$\vec{M} = \chi_p \vec{H},$$

где  $\chi_p$  – магнитная восприимчивость магнетика.

Отсюда видно, что выражение для парамагнитной восприимчивости:

$$\chi_p = 2N_1(\xi) \mu_B^2.$$

### Вопросы для контроля знаний

1. Проводники и диэлектрики в электрическом поле.
2. Принципиальные различия между диэлектриками и проводниками (металлами).
3. Поляризация диэлектриков.
4. Классификация диэлектриков
5. Диэлектрические потери. Пробой диэлектрика.
6. Классификация вещества по поведению во внешнем магнитном поле.
7. Идея существования молекулярных токов и ее обоснование в классической физике.

8. Механизм намагничивания диамагнетиков.
9. Механизм намагничивания парамагнетиков.
10. Механизм намагничивания диа – и пара магнетиков в квантовой теории.
11. Ферромагнетики.
12. Структура электронных оболочек ферромагнитных металлов.
13. Магнитострикция.
14. Антиферромагнетики.
15. Ферримагнетизм.
16. Магнетизм свободных электронов.
17. Диамагнетизм Ландау.
18. Термодинамический потенциал  $\Phi$ .
19. Парамагнетизм свободных электронов.
20. Парамагнетизм Паули

## Глава 5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

### 5.1 Явление электромагнитной индукции. Основной закон электромагнитной индукции.

В 1831 г. английский физик М. Фарадей экспериментально установил, что во всяком замкнутом проводящем контуре при изменении магнитного потока через поверхность, ограниченную контуром, возникает электрический ток. При этом величина тока не зависит от способа изменения магнитного потока и определяется только скоростью изменения магнитного потока  $\frac{d\Phi}{dt}$  (рис. 5.1).

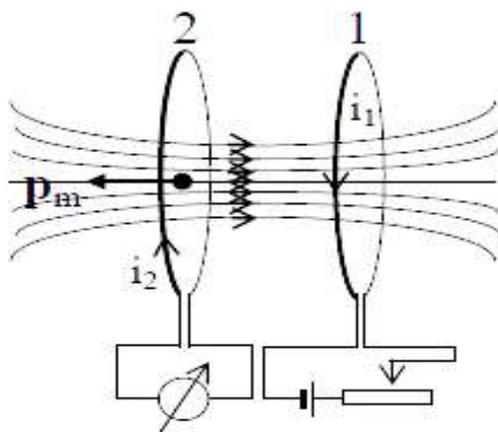


Рисунок 5.1 Опыт Фарадея

Позднее в 1832 г. независимо от М. Фарадея американский ученый Дж. Генри пришел к такому же выводу.

Известно, что в замкнутой цепи возникновение тока в проводнике возможно лишь при наличии в нем ЭДС. Следовательно, при всяком изменении магнитного потока, сцепленного с замкнутым проводящим контуром, в нем возникает ЭДС. Но ЭДС, в свою очередь, является проявлением электрического поля. Таким образом, при всяком изменении магнитного потока, сцепленного с замкнутым проводящим контуром, в контуре возникает электрическое поле, которое называют индукционным. Индукционное электрическое поле отличается от электрического поля неподвижного электрического заряда. Так, например, силовые линии индукционных электрических полей отличаются от силовых линий электрических полей неподвижных зарядов тем, что они всегда замкнуты. Поэтому индукционное электрическое поле называют вихревым.

Возникающую в проводниках ЭДС при изменении магнитного потока называют ЭДС электромагнитной индукции  $\varepsilon_i$ . Ток, возникающий в замкнутых проводниках при изменении магнитного потока, называют индукционным током. Надо отметить, что  $\varepsilon_i$  возникает в каждом отрезке проводника, даже в том случае, когда проводник не замкнут. Появление ЭДС электромагнитной индукции  $\varepsilon_i$  в проводниках обнаруживается по возникающей разности потенциалов на концах проводника. ЭДС электромагнитной индукции является распределенной в отличие от ЭДС источника тока, которая является сосредоточенной.

Таким образом, электромагнитная индукция - это возникновение электродвижущей силы (ЭДС индукции) в проводящем контуре, находящемся в переменном магнитном поле или движущимся в постоянном магнитном поле.

Необходимыми условиями возникновения ЭДС электромагнитной индукции в любом из двух (нескольких) взаимодействующих контуров, в одном из которых существует ток, являются (рис. 5.2):

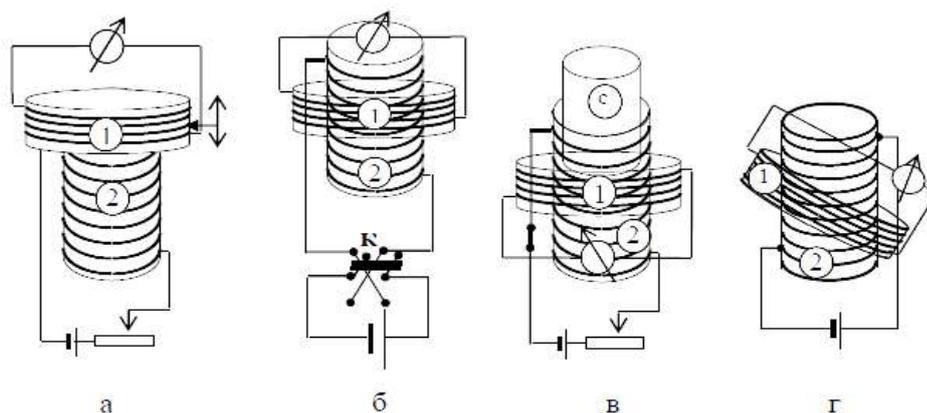


Рисунок 5.2 Условиями возникновения ЭДС

- а) изменение величины (силы) тока; изменение положения одного из контуров (рис. 5.2,а);
- б) изменение направления тока (рис. 5.2,б);
- в) изменение магнитной проницаемости среды в одном из контуров (рис. 5.2,в);
- г) поворот контура (без тока) в магнитном поле на некоторый угол (при этом угол отсчитывается между положительной нормалью к контуру и направлением магнитного поля) (рис. 5.2,г).

В системе СИ величина возникшей в элементе проводника ЭДС электромагнитной индукции  $\mathcal{E}_i$  определяется по формуле

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}, \quad (5.1)$$

где  $\frac{d\Phi}{dt}$  - скорость изменения магнитного потока.

Выражение (5.1) является математической формой записи закона Фарадея: «При пересечении потока магнитной индукции отрезком проводника в последнем возникает ЭДС электромагнитной индукции, прямо пропорциональная скорости изменения величины магнитного потока.»

Знак «минус» в правой части служит математическим выражением связи между направлением индукционного тока, возникающего в замкнутом проводнике (контуре), и изменением магнитного потока.

Индукционный ток всегда направлен так, чтобы своим действием препятствовать причине, его порождающей, или индукционный ток направлен так, что создаваемое им поле препятствует изменению магнитного потока. Данное утверждение носит название закона Ленца (1834 г.).

Направление индукционного тока в проводнике определяется «правилом правой руки». Иначе говоря, направление возникающего в контуре тока составляет с направлением изменения потока магнитной индукции левовинтовую систему.

Закон электромагнитной индукции (явление электромагнитной индукции) является прямым следствием возникновения индукционных токов в проводниках, движущихся в магнитном поле, что, в свою очередь, обусловлено действием на движущиеся электрические заряды силы Лоренца. Это связано с тем, что при движении проводника в магнитном поле его свободные электроны (электроны проводимости) под действием силы Лоренца приходят в движение относительно проводника, т.е. в проводнике возникает электрический ток. Это явление называется индукцией токов в движущихся проводниках.

Рассчитаем ЭДС, которая возникает в проводнике при его движении в однородном магнитном поле. Для этого рассмотрим прямолинейный участок некоторого замкнутого проводника (контура) прямоугольной формы, который движется с некоторой скоростью  $\mathbf{v}$ , в однородном магнитном поле, индукция которого  $\mathbf{B}$  перпендикулярна плоскости контура (рис. 5.3). На заряды в движущемся проводнике действует сила Лоренца:

$$\vec{F} = e[\vec{v} \times \vec{B}]. \quad (5.2)$$

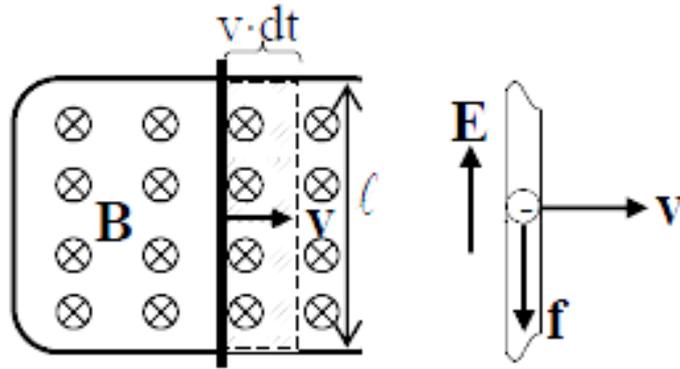


Рисунок 5.3 Движение проводника в однородном магнитном поле

Наличие силы  $\mathbf{F}$  эквивалентно тому, что в проводнике на заряды действует эффективное электрическое поле с напряженностью

$$\vec{E}_{\text{эф}} = \frac{\vec{F}}{e} [\vec{v} \times \vec{B}].$$

Следовательно, ЭДС индукции между некоторыми точками 1 и 2 проводника

$$(\Delta \varepsilon_i)_{21} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{эф}} \cdot d\vec{\ell} = \int_1^2 [\vec{v} \times \vec{B}] \cdot d\vec{\ell}. \quad (5.3)$$

В рассматриваемом случае

$$\varepsilon_i = \int_1 \vec{E}_{\text{эф}} \cdot d\vec{\ell} = vB\ell, \quad (5.4)$$

где  $v = \frac{dx}{dt}$  - скорость проводника;

$dx$  - элементарное изменение положения проводника в магнитном поле.

Тогда для ЭДС электромагнитной индукции имеем

$$\varepsilon_i = \frac{dx}{dt} B\ell = \frac{dS}{dt} B = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (5.5)$$

где  $\ell \cdot dx = dS$  - площадь, ограниченная движущимся контуром;

$B \cdot dS = d\Phi$  - поток магнитной индукции через рассматриваемую поверхность; знак « - » показывает, что направления векторов индукции магнитного поля  $\mathbf{B}$  и положительной нормали  $\mathbf{n}$  к площади  $dS$  противоположны.

Следовательно, при движении замкнутого проводника во внешнем магнитном поле в нем возникает электродвижущая сила индукции, равная скорости изменения потока индукции внешнего магнитного поля через поверхность, ограниченную контуром.

Формула (5.4) выведена для частного случая, когда движется лишь часть проводника в плоскости, перпендикулярной индукции магнитного поля. Если движется несколько участков проводника, то электродвижущая сила индукции в замкнутом контуре равна алгебраической сумме ЭДС индукции, возникающих на участках. Поэтому эта формула без всяких дальнейших вычислений обобщается на случай произвольного движения проводника в плоскости, перпендикулярной направлению вектора индукции магнитного поля. При этом движении контур проводника может, конечно, произвольно деформироваться.

Рассмотрим элемент длины проводника  $d\vec{\ell}$ , движущийся со скоростью  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ . На этой длине в соответствии с формулой (5.3) создается электродвижущая сила:

$$d\varepsilon_i = [\vec{v} \times \vec{B}] \cdot d\vec{\ell} = \frac{d}{dt} \cdot ([d\vec{r} \times \vec{B}] \cdot d\vec{\ell}). \quad (5.6)$$

Смешанное произведение в формуле (5.6) преобразуется следующим образом:

$$[\vec{d\vec{r}} \times \vec{B}] \cdot d\vec{\ell} = [d\vec{\ell} \times d\vec{r}] \vec{B} = -[d\vec{r} \times d\vec{\ell}] \vec{B} = -d\vec{S} \cdot \vec{B} = -d\Phi \quad (5.7)$$

где  $d\Phi$  - поток магнитной индукции через поверхность  $d\vec{S} = [d\vec{r} \times d\vec{\ell}]$  образованной элементом длины проводника  $d\vec{\ell}$  при его движении.

Положительное направление нормали к этому элементу поверхности выбирается совпадающим с положительным направлением нормали к поверхности, ограничиваемой контуром

Подставляя формулу (5.7) в (5.6), получаем

$$d\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (5.8)$$

Для нахождения полной электродвижущей силы индукции в замкнутом контуре надо проинтегрировать ЭДС индукции от всех элементов  $d\vec{\ell}$  этого контура:

$$\mathcal{E}_i = -\oint_L \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \quad (5.9)$$

где  $\oint_L d\Phi = \Delta\Phi$  - изменение потока магнитной индукции через поверхность, ограниченную замкнутым контуром.

Формула (5.9) совпадает по внешнему виду с формулой (5.5). Тем самым доказано, что формула (5.6) справедлива при произвольных движениях и деформациях замкнутого контура. Однако физическое содержание ее совершенно иное. Возникновение ЭДС, учитываемое формулой (5.5), связано с действием силы Лоренца на движущиеся заряды. В возникновении ЭДС, учитываемой формулой (5.1), никакая сила Лоренца не участвует, поскольку проводники могут быть неподвижными. Однако в проводнике возникает электрический ток, поэтому можно сделать вывод, что в нем имеется электрическое поле. Следовательно, закон Фарадея (5.1) выражает новое физическое явление: изменяющееся магнитное поле порождает электрическое поле. Таким образом, электрическое поле порождается не только электрическими зарядами, но и изменяющимся магнитным полем.

Строго говоря, наличие тока в замкнутом проводнике показывает, что электрическое поле существует лишь внутри проводника. Проводник в данном случае играет роль устройства для обнаружения электрического поля. При отсутствии проводника изменяющееся магнитное поле также порождает электрическое поле. Это доказывает, что электромагнитная индукция является фундаментальным всеобщим законом природы, устанавливающим связь между электрическими и магнитными полями.

Если замкнутый проводник движется в переменном магнитном поле, испытывая при этом произвольные деформации формы, то ЭДС индукции в нем возникает как за счет движения и деформации, учитываемой формулой (5.5), так и в результате изменения магнитного поля, учитываемого аналогичной формулой (5.1). Поэтому можно утверждать, что ЭДС индукции в проводнике определяется формулой (5.1), причем под величиной  $\frac{d\Phi}{dt}$  понимается полная скорость изменения потока магнитной индукции, охватываемого проводником, как за счет его движения и деформации, так и в результате изменения магнитного поля.

## 5.2 Вывод основного закона электромагнитной индукции из закона сохранения и превращения энергии

Основной закон электромагнитной индукции (закон Фарадея) можно вывести из закона сохранения и превращения энергии, что и было сделано Гельмгольцем (1847 г.).

Пусть имеется замкнутая цепь (контур с током), содержащая источник ЭДС, величина которой  $\mathcal{E}$ , и пусть полное сопротивление этой цепи равно  $R$ . Обозначим силу тока в цепи через  $I$ . Количество энергии, затрачиваемое источником ЭДС за время  $dt$ , как известно, равно

$$dW = I\mathcal{E} \cdot dt.$$

Если внешнее магнитное поле отсутствует или контур неподвижен, то вся эта энергия превращается в тепло, количество которого определяется законом Джоуля-Ленца:

$$dQ = I^2 R \cdot dt.$$

Имеем

$$I \mathcal{E} \cdot dt = I^2 R \cdot dt.$$

Откуда после сокращения на  $dt$  получим закон Ома для замкнутой (полной) цепи в интегральной форме:

$$\mathcal{E} = IR \text{ и } I = \frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (4.11)$$

При перемещении такого контура с источником ЭДС (с током) в магнитном поле часть энергии источника тока будет расходоваться против перемещения контура в магнитном поле, а часть выделяться в контуре в виде тепла. Расходование энергии источника тока против перемещения контура с током в магнитном поле связано с тем, что для получения индукционных токов методом перемещения проводника в магнитном поле необходимо совершить работу, так как сила, действующая на индукционный ток, препятствует перемещению проводника.

Известно, что работа по перемещению проводника с током в магнитном поле  $dA = I \cdot d\Phi$ , где  $d\Phi$  – величина изменения магнитного потока, сцепленного с данным контуром.

Так как при таком перемещении магнитное поле остается неизменным, то эта работа может совершаться лишь за счет энергии источника тока.

На основании закона сохранения и превращения энергии будем иметь

$$dW = dQ + dA$$

или

$$I \mathcal{E} \cdot dt = I^2 R \cdot dt + I \cdot d\Phi.$$

Откуда

$$\mathcal{E} = IR + \frac{d\Phi}{dt}. \quad (5.10)$$

Решая уравнение (5.10) относительно силы тока, найдем

$$I = \frac{\mathcal{E} - \frac{d\Phi}{dt}}{R}. \quad (5.11)$$

Принимая равенство (5.11) за математическое выражение закона Ома и сравнивая его с полученным ранее для этого же контура в отсутствие магнитного поля, можно установить, что благодаря изменению потока магнитной индукции к имевшейся в цепи ЭДС источника прибавилась ЭДС:

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (5.12)$$

Как видно, величина ЭДС электромагнитной индукции не зависит от величины  $\mathcal{E}$  источника тока и, значит, сохранит свое значение и при  $\mathcal{E} = 0$ , т.е. будет возникать вне зависимости от всяких других ЭДС, действующих в той же цепи. Знак «минус» служит математическим выражением правила (закона) Ленца.

Таким образом, формула (5.12) является математическим выражением основного закона электромагнитной индукции (в формулировке Максвелла).

Аналогично можно получить вывод этого закона и для отрезка проводника (в формулировке Фарадея).

### 5.3 Явление самоиндукции. Коэффициенты индуктивности и взаимной индуктивности

Известно, что вокруг любого проводника с током возникает магнитное поле. Следовательно, с любым контуром тока всегда связан поток магнитной индукции. Этот поток будет изменяться при изменении силы тока в контуре, а также формы контура или магнитной проницаемости окружающей среды. Изменение же магнитного потока, согласно закону электромагнитной индукции, возбудит в контуре ЭДС. ЭДС электромагнитной индукции, которая возникает в каком-либо контуре вследствие изменения магнитного потока, создаваемого электрическим током этого контура, называют ЭДС самоиндукции (рис. 5.4).

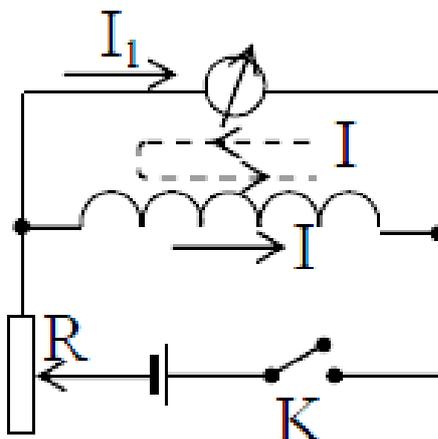


Рисунок 5.4 Явление самоиндукции

Величина ЭДС самоиндукции может быть определена по общей формуле, выражающей основной закон электромагнитной индукции:

$$\mathcal{E}_c = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

Рассчитаем ЭДС самоиндукции, возникающую в бесконечно длинном соленоиде, магнитное поле которого однородно находится внутри объема соленоида, заполненного средой с магнитной проницаемостью  $\mu$ .

Магнитный поток  $\Phi_1$ , пронизывающий каждый виток соленоида сечением  $S$ ,

$$\Phi_1 = BS = \mu\mu_0 HS = \mu\mu_0 \frac{IN}{\ell} S.$$

При изменении тока в соленоиде в каждом витке возникает ЭДС самоиндукции:

$$\mathcal{E}_{c1} = - \frac{d\Phi_1}{dt} = - \frac{d}{dt} \left( \mu\mu_0 \frac{IN}{\ell} S \right).$$

В  $N$  последовательно соединенных витках соленоида возникает ЭДС самоиндукции:

$$\mathcal{E}_c = \sum_{i=1}^N \mathcal{E}_{c1} = N\mathcal{E}_{c1} = - \frac{d}{dt} \left( \mu\mu_0 \frac{IN^2}{\ell} S \right) = - \frac{d}{dt} (\mu\mu_0 n^2 \ell IS) = - \frac{d}{dt} (LI).$$

где  $L = \left( \mu\mu_0 \frac{N^2}{\ell} S \right) = (\mu\mu_0 n^2 \ell S) = \mu\mu_0 n^2 V$  - коэффициент самоиндукции или индуктивность.

Индуктивность  $L$  зависит от формы, размеров проводника и магнитной проницаемости среды, окружающей проводник.

При  $\frac{dI}{dt} = 1 \frac{A}{c} |\mathcal{E}_c| = |L|$ , т.е. индуктивность (коэффициент самоиндукции) – это физическая величина, численно равная ЭДС самоиндукции, возникающей в проводнике при скорости изменения тока в нем, равной 1 А/с. В системе СИ индуктивность проводников измеряется в «генри» (Гн).

Один Гн (генри) – это индуктивность такого проводника, в котором при скорости изменения тока в 1 А/с индуцируется ЭДС самоиндукции, равная 1 В.

Если  $L = \text{const}$ ,

$$\mathcal{E}_c = -L \frac{dI}{dt}.$$

Следовательно, ЭДС самоиндукции прямо пропорциональна скорости изменения тока в проводнике. Оказывается, что данное утверждение справедливо для любых проводников.

Если  $L \neq \text{const}$ , что возможно при  $\mu = f(H)$ ,

$$\mathcal{E}_c = -L \frac{dI}{dt} - I \frac{dL}{dt}.$$

То есть при наличии ферромагнетиков и в переменных магнитных полях коэффициент пропорциональности в выражении для ЭДС самоиндукции не равен  $L$ .

Таким образом, в проводниках с переменным током существуют одновременно две ЭДС - источника тока и самоиндукции.

При возрастании тока  $\frac{dI}{dt} > 0, \mathcal{E}_c < 0$ , а это означает, что ЭДС самоиндукции «тормозит» движение зарядов в проводнике, совершая отрицательную работу, т.е. уменьшает ток в проводнике.

Если ток в проводнике убывает  $\frac{dI}{dt} < 0, \mathcal{E}_c > 0$  - ЭДС самоиндукции препятствует уменьшению тока в проводнике.

Следовательно,  $\mathcal{E}_c$  противодействует причине, которая порождает ее (препятствует изменению тока в проводнике).

Сравнивая выражения  $\mathcal{E}_c = -\frac{d\Phi}{dt}$  и  $\mathcal{E}_c = -\frac{d(LI)}{dt}$  - для магнитного потока, имеем

$$\Phi = LI.$$

### Взаимная индукция. Коэффициент взаимной индукции

Взаимная индукция, явление, в котором обнаруживается магнитная связь двух или более электрических цепей. Благодаря этой связи возникает ЭДС индукции в одном из контуров при изменении тока в другом. Количественной характеристикой магнитной связи электрических цепей является взаимная индуктивность.

Если два контура (два замкнутых проводника) находятся в магнитных полях друг друга, то при всяком изменении тока в одном из них происходит изменение магнитного потока, пронизывающего (сцепленного) другой контур, что вызывает в нем появление ЭДС индукции (рис. 5.5). Магнитный поток через первый контур с током  $I_1$  частично пронизывает площадь, ограниченную вторым контуром. Причем магнитный поток  $\Phi_{12}$  через контур два прямо пропорционален току  $I_1$ :

$$\Phi_{12} = M_{12}I_1,$$

где  $M_{12}$  - коэффициент пропорциональности, зависящий от размеров, формы контуров, расстояния между ними, от их взаимного расположения, а также от магнитной проницаемости окружающей среды. Он называется взаимной индуктивностью или коэффициентом взаимной индукции контуров. В системе СИ измеряется в генри (Гн).

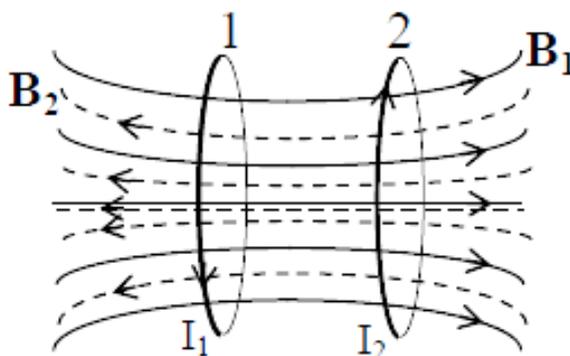


Рисунок 5.5 Два замкнутых проводника в магнитном поле

Если ток  $I_2$  течет в контуре "два", то магнитный поток  $\Phi_{21}$  через контур «один» также пропорционален току  $I_2$ :

$$\Phi_{21} = M_{21}I_2.$$

Согласно закону электромагнитной индукции,

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -M_{12}\frac{dI_1}{dt}; \\ \varepsilon_1 &= -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M_{21}\frac{dI_2}{dt},\end{aligned}$$

где  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_1$  - возникающие во втором и в первом контурах ЭДС индукции;  $\frac{d\Phi_{12}}{dt}$  и  $\frac{d\Phi_{21}}{dt}$  - скорости изменения магнитных потоков через соответствующие контуры.

Взаимная индукция лежит в основе действия трансформаторов.

#### 5.4 Явление самоиндукции при замыкании и размыкании электрической цепи

Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из источника с ЭДС  $\varepsilon$ , сопротивления  $R$  и соленоида с индуктивностью  $L$ , которые соединены последовательно (рис. 5.6).

При включении источника в такую цепь, начиная с момента времени  $t = 0$ , в цепи появится возрастающий электрический ток  $I$ . За счет возрастания магнитного поля в соленоиде в замкнутом контуре возникает ЭДС самоиндукции, действующая противоположно сторонней ЭДС источника. В результате рост силы тока в цепи замедляется.

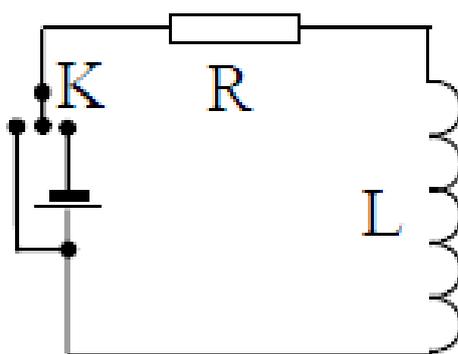


Рисунок 5.6 Электрическую цепь

В этом случае закон Ома ( при  $r \ll R$ ,  $L = \text{const}$ ) имеет вид

$$I = \frac{E + \varepsilon_c}{R},$$

где  $\varepsilon_c = -L\frac{dI}{dt}$ . Следовательно

$$I = \frac{\varepsilon - L\frac{dI}{dt}}{R} = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{L}{R}\frac{dI}{dt}.$$

Разделяя переменные ( $I$  и  $t$ ), имеем

$$I - \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{L}{R}\frac{dI}{dt}$$

Или

$$-\frac{R}{L} \cdot dt = \frac{dI}{I - \frac{\varepsilon}{R}}$$

Интегрируя, получим

$$\frac{R}{L}t + \ln C = \ln \left( I - \frac{\varepsilon}{R} \right),$$

$$C e^{\frac{R}{L}t} = I - \frac{\varepsilon}{R}.$$

При  $t = 0, I = 0$   $C = -\frac{\varepsilon}{R}$ , тогда

$$I = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{\varepsilon}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right),$$

т.е. ток постепенно возрастает от  $I = 0$  до  $I = \varepsilon/R$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Установившееся значение силы тока, соответствующее закону Ома для постоянного тока, достигается лишь в смысле предела при бесконечном времени. На рис. 5.7 показана зависимость тока от времени при включении источника в цепь, состоящую из индуктивности и сопротивления. При увеличении индуктивности в цепи нарастание силы тока происходит медленнее.

Учитывая экспоненциальную зависимость силы тока от времени, можно как обычно за время нарастания силы тока в цепи принять такое значение  $t$ , при котором показатель экспоненты обращается в "минус" единицу, т.е.  $t = \frac{L}{R}$ .

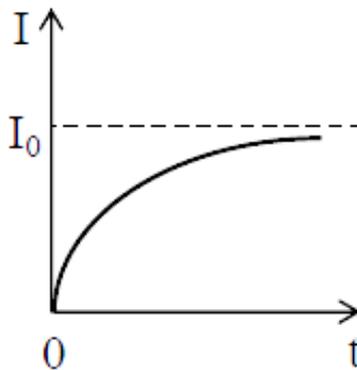


Рисунок 5.7 Зависимость тока от времени

Аналогично можно показать, что при выключении постоянного источника ЭДС сила тока не падает мгновенно до нуля, а уменьшается постепенно согласно уравнению

$$I = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Время убывания силы тока определяется той же формулой:  $t = \frac{L}{R}$ . Электродвижущей силой, которая обеспечивает существование тока в цепи в течение этого промежутка времени, является ЭДС самоиндукции, а источником энергии - энергия магнитного поля катушки индуктивности. На рис. 5.8 показана зависимость тока от времени при выключении источника из цепи, состоящей из индуктивности и сопротивления. При увеличении индуктивности в цепи убывание силы тока происходит медленнее.

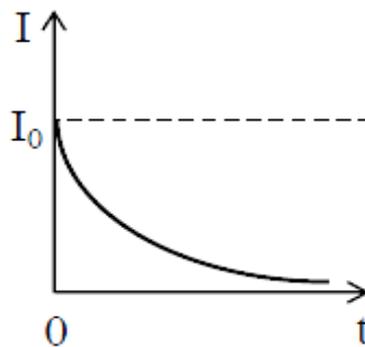


Рисунок 5.8 Зависимость тока от времени при выключении

Вопросы включения и выключения ЭДС с самоиндукцией впервые рассмотрел Гельмгольц в 1855 г.

Если цепь состоит из сопротивления  $R$  и конденсатора  $C$ , то наличие конденсатора исключает возможность протекания по ней постоянного тока (рис. 5.9). В этом случае разность потенциалов между обкладками конденсатора, на которых располагаются соответствующие заряды, полностью компенсирует действие сторонней ЭДС источника тока. Однако переменный ток в цепи при наличии конденсатора существует, поскольку в этом случае заряд на обкладках конденсатора переменен, что и обеспечивает протекание тока в цепи. Кроме того, разность потенциалов на обкладках конденсатора не компенсирует действия сторонней ЭДС источника тока, благодаря чему и поддерживается соответствующая сила тока.

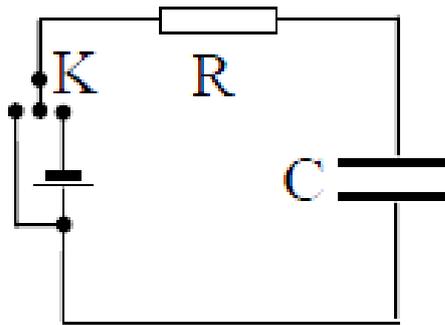


Рисунок 5.9 Электрическая цепь RC

Закон Ома при наличии в цепи конденсатора и сопротивления записывается в виде уравнения

$$I = \frac{U_0 - \frac{q}{C}}{R}, \quad (5.13)$$

где  $q$  - заряд на обкладке конденсатора;

$\frac{q}{C} = U$  - разность потенциалов между обкладками конденсатора.

Продифференцировав уравнение (5.13) по  $t$ , получим

$$R = \frac{dI}{dt} = \frac{dU_0}{dt} - I \frac{1}{C}, \quad (5.14)$$

где  $I = \frac{dq}{dt}$  - ток в цепи.

Включение и выключение постоянной ЭДС в цепь с емкостью и сопротивлением приводит к следующим результатам. Пусть постоянное напряжение  $U_0$  включается в момент  $t = 0$ . Из уравнения (5.13) видно, что  $I_0 = \frac{U_0}{R}$ , а уравнение (5.14) принимает при  $t > 0$  вид

$$R = \frac{dI}{dt} = -I \frac{1}{C}.$$

Решение этого уравнения при начальном условии ( $I_0 = \frac{U_0}{R}$ ) выражается соотношением

$$I(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} = I_0 e^{-\frac{1}{RC}t}. \quad (5.15)$$

Следовательно, с течением времени сила тока в цепи убывает от максимального значения  $I_0$  до нуля. Время убывания тока определяется соотношением

$$\tau = RC. \quad (5.16)$$

Поэтому если емкость  $C$  достаточно велика, то ток после выключения постоянного напряжения может существовать достаточно заметное время. После того как сила тока упала до нуля, конденсатор оказывается заряженным до разности потенциалов, равной сторонней ЭДС, но противоположно направленной. Они компенсируют друг друга. При выключении сторонней ЭДС разность потенциалов на обкладках конденсатора оказывается не скомпенсированной. По цепи

начинает течь ток, начальная сила которого  $I_0$ , а закон уменьшения силы тока полностью совпадает с (5.15) с тем же временем убывания. В общем случае, когда цепь состоит из емкости  $C$ , индуктивности  $L$ , сопротивления  $R$  и источника тока с ЭДС, равной  $\varepsilon$  (рис. 5.10), уравнение для тока в цепи можно записать так:

$$IR = U - L \frac{dI}{dt} - \frac{q}{C}. \quad (5.17)$$

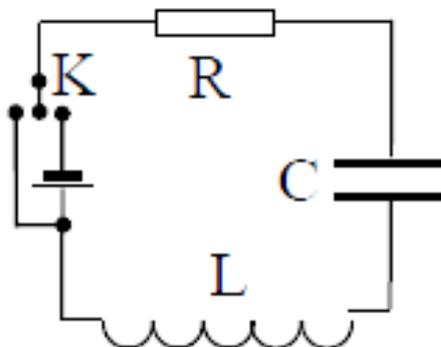


Рисунок 5.10 Электрическая цепь RLC

После дифференцирования по  $t$  обеих частей выражения (5.17) можно записать

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + I \frac{1}{C} = \frac{dU}{dt}.$$

Данное уравнение имеет различные частные решения.

### 5.5 Энергия магнитного поля.

#### Объемная плотность энергии магнитного поля

При изменении потока магнитной индукции, охватываемого контуром, в контуре, в соответствии с законом Фарадея, возникает ЭДС индукции.

У изолированного контура поток электромагнитной индукции  $\Phi$  возникает за счет магнитного поля, создаваемого током в контуре. При изменении силы тока изменяется поток магнитной индукции  $\Phi$ , в контуре возникает ЭДС самоиндукции. По правилу Ленца она своим действием препятствует увеличению силы тока. Для увеличения силы тока необходимо, чтобы сторонняя ЭДС источника должна совершить работу против ЭДС самоиндукции.

Если в цепи течет постоянный ток, то энергия, поступающая в цепь из источника тока, расходуется на выделение джоулевой теплоты и на совершение работы в потребителе энергии. Индукция магнитного поля, как и его энергия, при этом неизменна. Индукция меняется с изменением тока. Следовательно, источник сторонней ЭДС передает в цепь энергию на создание магнитного поля в процессе увеличения силы тока. Вычислив работу, совершаемую источником сторонней ЭДС по увеличению силы тока от нуля до конечного значения, можно рассчитать энергию магнитного поля.

За время  $dt$  по проводнику проходит электрический заряд  $dq = I \cdot dt$  и, следовательно, против ЭДС самоиндукции источник сторонних сил совершает работу

$$dA = -\varepsilon_c I \cdot dt = \frac{d\Phi}{dt} I \cdot dt = I \cdot \Phi$$

При совершении этой работы происходит превращение энергии источника тока в энергию магнитного поля тока в контуре. Поэтому изменение энергии магнитного поля связано с изменением потока соотношением

$$dW = I \cdot d\Phi \quad (5.18)$$

Индукция магнитного поля, в соответствии с законом Био-Савара Лапласа, линейно зависит от силы тока. Поэтому при переменной силе тока, протекающего по неподвижному жесткому контуру, индукция в каждой точке растет пропорционально силе тока. А это означает, что поток магнитной

индукции  $\Phi$  через фиксированную неподвижную площадь также пропорционален силе тока, и поэтому

$$\Phi = LI, \quad (5.19)$$

где  $L$  - индуктивность контура, не зависящая от силы тока и индукции магнитного поля. Подставляя (5.19) в (5.18), находим

$$dW = LI \cdot dI. \quad (5.20)$$

Интегрируя обе части (5.20) от  $I = 0$  до некоторого значения  $I$ , получаем

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

Это формула определяет энергию магнитного поля, создаваемого током  $I$  в контуре, индуктивность которого  $L$ .

Аналогично можно найти энергию магнитного поля двух контуров с током. При этом надо учесть, что ЭДС индукции в каждом контуре возникает не только за счет изменения потока индукции магнитного поля, создаваемого током этого контура, но и за счет изменения потока индукции магнитного поля, создаваемого током, текущим в другом контуре.

Для ЭДС индукции, возникших в первом и втором контурах, будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{i1} &= -\frac{d\Phi_1}{dt} = \left( L_{11} \frac{dI_1}{dt} + L_{12} \frac{dI_2}{dt} \right); \\ \mathcal{E}_{i2} &= -\frac{d\Phi_2}{dt} = \left( L_{21} \frac{dI_1}{dt} + L_{22} \frac{dI_2}{dt} \right). \end{aligned}$$

Работа, совершаемая источниками сторонних ЭДС контуров в течение времени  $dt$ , равна

$$dA = \frac{1}{2} \cdot d(L_{11}I_1^2 + L_{22}I_2^2 + L_{12}I_1I_2 + L_{21}I_2I_1). \quad (5.21)$$

Учитывая, что затрачиваемая на увеличение силы тока работа равна энергии образовавшегося при этом магнитного поля, после интегрирования обеих частей равенства (5.21) от нулевых значений силы тока в контурах  $I_1 = 0$ ,  $I_2 = 0$  до их значений  $I_1$  и  $I_2$ , получаем

$$W = \frac{1}{2} (L_{11}I_1^2 + L_{22}I_2^2 + L_{12}I_1I_2 + L_{21}I_2I_1) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 L_{ik}I_iI_k. \quad (5.22)$$

Формула (5.22) определяет энергию магнитного поля, создаваемого токами  $I_1$  и  $I_2$ . Она легко обобщается на случай  $N$  контуров:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N L_{ik}I_iI_k, \quad (5.23)$$

где  $L_{ik}$  при  $i = k$  называется индуктивностью  $i$ -го контура, а при  $i \neq k$  взаимной индуктивностью  $i$ -го и  $k$ -го контуров.

Величину  $L_{ik}$  при  $i \neq k$  можно определить по формуле

$$L_{ik} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{d\ell_i \cdot d\ell_k}{r_{ik}}, \quad (5.24)$$

где  $d\ell_i, d\ell_k$  - элементы  $i$ -го и  $k$ -го контуров;

$r_{ik}$  - расстояние между ними.

Из уравнения (5.24) следует равенство  $L_{ik} = L_{ki}$ .

Магнитное поле заданных токов распределено по всему пространству. Нетрудно рассчитать энергию магнитного поля, приходящуюся на единицу объема магнитного поля. Для этого лучше всего воспользоваться однородным магнитным полем, которое может существовать внутри длинного соленоида.

В этом случае магнитный поток  $\Phi$ , сцепленный с  $N$  витками соленоида, равен произведению этого числа на магнитный поток  $\Phi_0$ , пронизывающий каждый из витков, площадь которого  $S$ :

$$\Phi = \Phi_0 N = NBS \cdot \cos\alpha = NBS,$$

где  $\alpha$  - угол между направлениями положительной нормали  $n$  к площади витка и вектора  $\mathbf{B}$  в данном месте соленоида. В рассматриваемом случае  $\cos\alpha=1$ .

Как известно, напряженность магнитного поля длинного соленоида

$$H = nI = \frac{NI}{\ell}, \quad (5.25)$$

где  $n = \frac{N}{\ell}$  - число витков, приходящиеся на единицу длины соленоида;

$\ell$  - длина соленоида;

$I$  - ток в соленоиде.

Из формулы (5.25) для силы тока имеем

$$I = \frac{H\ell}{N}.$$

Тогда энергия магнитного поля соленоида

$$W = \frac{1}{2} NBS \frac{N\ell}{N} = \frac{1}{2} HBV,$$

где  $V = S\ell$  - объем соленоида, заполненный однородным магнитным полем.

Объемная плотность энергии магнитного поля – это физическая величина, которая показывает, какой энергией обладает магнитное поле, занимающее единицу объема пространства.

По определению

$$W_0 = \frac{W}{V}.$$

Объемная плотность магнитного поля длинного соленоида

$$w = \frac{1}{2} HB = \frac{1}{2} \mu\mu_0 H^2 = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}. \quad (5.26)$$

Из выражения (5.26) видно, что объемная плотность энергии магнитного поля в каждой точке пространства определяется значением векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  поля в этой точке и не зависит от того, какими источниками это магнитное поле создано.

В неоднородном магнитном поле энергия  $dW$  магнитного поля элемента объема  $dV$  равна

$$dW = w_0 \cdot dV. \quad (5.27)$$

Энергию неоднородного магнитного поля, занимающего какой-либо объем пространства, можно определить, интегрируя (4.50) по объему  $V$ :

$$W = \int_V W_0 \cdot dV. \quad (5.28)$$

Из выражения (5.28) видно, что объемная плотность энергии магнитного поля в каждой точке пространства определяется значением векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  поля в этой точке и не зависит от того, какими источниками это магнитное поле создано. В неоднородном магнитном поле энергия  $dW$  магнитного поля элемента объема  $dV$  равна

$$dW = w_0 \cdot dV. \quad (5.29)$$

Энергию неоднородного магнитного поля, занимающего какой-либо объем пространства, можно определить, интегрируя (5.29) по объему  $V$ :

$$dW = \int_V w_0 * dV.$$

### 5.6 Движение заряженных частиц в однородном электрическом поле

Попадая в электрическое или магнитное поля, любая заряженная частица оказывается под влиянием определенных сил, в результате чего изменяется характер их первоначального движения. Следовательно, воздействуя на потоки заряженных частиц электрическим, магнитным или совместно электрическим и магнитным полями, можно управлять этими потоками. Можно изменять их интенсивность, направление движения. Управление потоками заряженных частиц лежит в основе устройства и действия различных электронных, ионных приборов; электронных микроскопов; ускорителей заряженных частиц; установок электронно-лучевого и магнетронного напыления в вакууме.

Если частица с зарядом  $q$  движется в однородном электрическом поле с напряженностью  $E$ , то на нее действует сила, под действием которой скорость частицы может изменить как величину, так и направление. Величина этой силы

$$F_E = qE,$$

Уравнение движения частицы в этом случае можно записать, воспользовавшись вторым законом Ньютона ( $ma = F = F_E$ ):

$$m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E}.$$

Пусть некоторая частица, заряд которой  $q$  и начальная скорость  $|v| = v_0$ , попадает в электрическое поле плоского конденсатора в направлении «х», перпендикулярном вектору напряженности электрического поля  $E$  (рис. 5.11). Как только частица попадает в электрическое поле, на нее начинает действовать сила  $F$  в направлении перпендикулярном первоначальному направлению «х», в направлении «у». Под действием этой силы изменится направление и величина ее скорости. Покинув конденсатор, заряженная частица отклонится от своего первоначального направления движения на некоторый угол  $\theta$ . Уравнения движения частицы в направлениях «х» и «у» в этом случае будут иметь вид

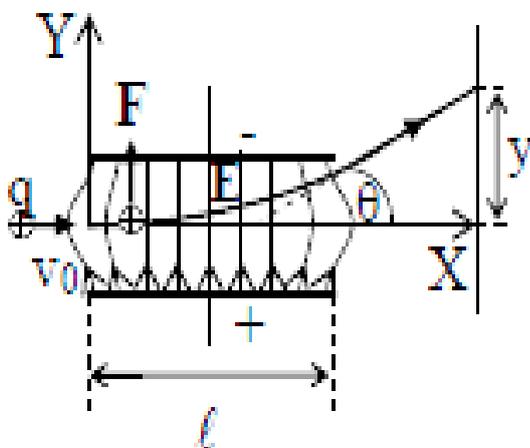


Рисунок 5.11 Движения частицы в конденсаторе

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ m \frac{dv_y}{dt} = qE_y = qE \end{cases}$$

Решая уравнения движения, можно определить уравнение траектории движения частицы, угол отклонения  $\theta$  от первоначального направления, выяснить характер ее движения.

Например, так как  $m \frac{dv_x}{dt} = 0$ , то

$$v_x = v_0 = \text{const.}$$

Следовательно, в направлении «х» частица движется равномерно (с постоянной скоростью). Так как в направлении «у» справедливо уравнение

$$m \frac{dv_y}{dt} = qE_y = qE$$

то в этом направлении она приобретает ускорение

$$a = \frac{dv_x}{dt} = \frac{qE}{m}.$$

Величина отклонения от первоначального направления «у» при прохождении частицей некоторого расстояния  $l$  в электрическом поле равна

$$y = \frac{at^2}{2} = \frac{qEt^2}{2m} = \frac{qE\ell^2}{2v_0^2}, \quad (5.30)$$

где  $t = \frac{l}{v_x} = \frac{l}{v_0}$ .

Тангенс угла отклонения частицы от первоначального направления движения

$$tg\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{v_y}{v_x},$$

где

$$v_y = at = \frac{qE\ell}{mv_0^2},$$

$$v_x = v_0.$$

Таким образом,

$$tg\theta = \frac{qE\ell}{mv_0^2}. \quad (5.31)$$

Из выражений (5.30), (5.31) видно, что отклонение и угол отклонения зависят от отношения  $\frac{q}{m}$  (величины удельного заряда). Зная удельный заряд частиц, можно судить о величине их отклонения при прохождении одного и того же расстояния в однородном электрическом поле с известным значением  $E$ . Движение заряженных частиц в однородных электрических полях подобно движению тел, брошенных с некоторой начальной горизонтальной скоростью в поле тяготения Земли.

### 5.7 Движение заряженных частиц в однородном магнитном поле

Известно, что при движении заряженной частицы в магнитном поле на нее действует сила Лоренца, которая пропорциональна величине заряда, скорости частицы индукции магнитного поля и синусу угла между направлениями векторов скорости  $v$  и индукции магнитного поля  $B$ :

$$F_{л} = qvB \cdot \sin\alpha,$$

или векторной форме

$$\vec{F}_{л} = q[\vec{v} * \vec{B}],$$

где  $\alpha$  - угол между векторами  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{B}$ .

Если частица попадает в однородное магнитное поле и при этом ее скорость перпендикулярна направлению индукции магнитного поля  $\mathbf{B}$ , то в этом случае сила Лоренца, являясь силой, перпендикулярной направлению скорости движения частицы, является центростремительной силой (рис. 5.12), под действием которой заряженная частица движется по окружности. Радиус  $R$  окружности можно определить из следующих соображений.

Так как

$$|F_L| = |F_{ц}|,$$

а

$$|F_L| = qvB, \quad |F_{ц}| = \frac{mv^2}{R},$$

то

$$qvB = \frac{mv^2}{R}.$$

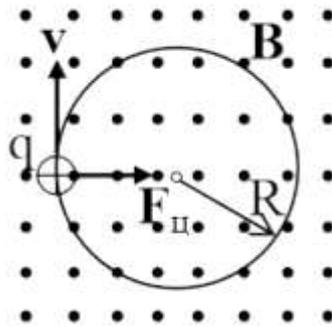


Рисунок 5.12 Частица в однородном магнитном поле

Откуда для радиуса окружности будем иметь

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{v}{\frac{qB}{m}}. \quad (5.32)$$

Период обращения (время, за которое частица сделает один полный оборот), равен

$$T = \frac{\ell}{v} = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi v}{\frac{qBv}{m}} = \frac{2\pi}{\frac{qB}{m}}. \quad (5.33)$$

Для частоты обращения (числа оборотов, которые сделает частица за единицу времени) имеем

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}. \quad (5.34)$$

Из соотношений (5.33), (5.34) видно, что  $T$  и  $\nu$  не зависят от кинетической энергии частицы.

Если начальная скорость частицы  $\mathbf{v}$ , влетающей в однородное магнитное поле, составляет некоторый угол  $\alpha$  с направлением поля (рис. 5.13), то заряженная частица будет двигаться по винтовой линии (цилиндрической спирали). Разложив  $\mathbf{v}$  на составляющие

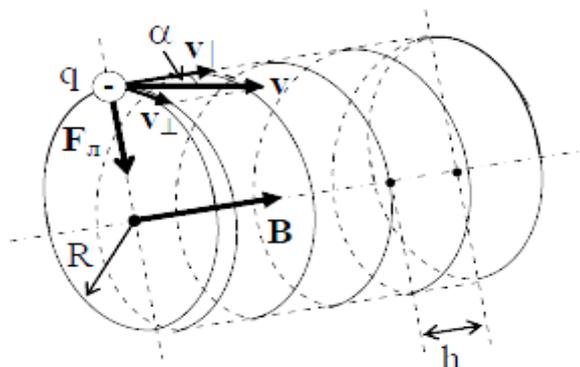


Рисунок 5.13 Частица влетает под углом в однородном магнитном поле

( $v_{\parallel} = v \cdot \cos\alpha$ , параллельную полю, и  $v_{\perp} = v \sin\alpha$ , перпендикулярную к нему), можно сделать вывод, что действительно по направлению поля частица движется равномерно (т.к.  $F_{\parallel} = 0$ ), а перпендикулярно ему по окружности ( $F_{\perp} \neq 0$ ).

Шаг винтовой линии (спирали) можно определить по формуле

$$h = vT \cdot \cos\alpha = \frac{2\pi v \cdot \cos\alpha}{\frac{q}{m} B}.$$

Таким образом, характер движения заряженных частиц в магнитных полях зависит от индукции магнитного поля и удельного заряда частицы.

## 5.8 Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях. Гальваномагнитные явления

При движении заряженных частиц в электромагнитных полях на них действует сила Лоренца:

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}]).$$

При этом формула, определяющая силу Лоренца, справедлива при любых значениях скорости заряженной частицы.

Первое слагаемое в правой части формулы – это сила, действующая на заряженную частицу в электрическом поле, второе слагаемое – это сила, действующая на частицу со стороны магнитного поля.

В вакууме в однородном постоянном магнитном поле ( $\mathbf{B}_0 = \mathbf{H}_0$ , где  $\mathbf{H}_0$  – напряженность магнитного поля) заряженная частица под действием магнитной составляющей силы Лоренца движется по винтовой линии (при  $\alpha \neq 90^\circ$ ) с постоянной по величине скоростью  $\mathbf{v}$ ; при этом ее движение складывается из равномерного прямолинейного движения вдоль направления  $\mathbf{H}$  (со скоростью  $v_{\parallel}$  – составляющей скорости частицы  $\mathbf{v}$  в направлении  $\mathbf{H}$ ) и равномерного вращательного движения в плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{H}$  (со скоростью  $v_{\perp}$  – составляющей скорости  $\mathbf{v}$  в направлении, перпендикулярном  $\mathbf{H}$ ). Проекция траектории движения частицы на плоскость, перпендикулярную  $\mathbf{H}$ , – окружность, радиус которой вычисляется по формуле (5.32), а частота вращения – по (5.34). Частоту вращения частицы называют иногда циклотронной частотой. Ось винтовой линии совпадает с направлением  $\mathbf{H}$ , и центр окружности перемещается вдоль силовой линии поля со скоростью  $v_{\parallel}$ .

Если  $\mathbf{E} \neq 0$ , то движение в магнитном поле носит более сложный характер. Происходит перемещение центра вращения частицы перпендикулярно полю  $\mathbf{H}$ , которое называется дрейфом частицы. Направление дрейфа определяется вектором  $[\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}]$  и не зависит от знака заряда. Скорость дрейфа  $u$  для простейшего случая скрещенных под прямым углом электрического  $\mathbf{E}$  и магнитного  $\mathbf{H}$  полей определяется соотношением

$$u = \frac{E}{H}.$$

В качестве примера рассмотрим узкий пучок одинаковых заряженных частиц (электронов), попадающий в отсутствие полей на перпендикулярный к нему экран в точку 0 (рис. 5.14, 5.15).

Если на пути частицы поместить источник однородного электрического поля (рис. 5.14) или источник однородного магнитного поля (рис. 5.15), то след пучка смещается на величину "У" от носителя точки 0. Будем считать, что

$$\vec{E} \perp \vec{v} \text{ и } \vec{B} \perp \vec{v}.$$

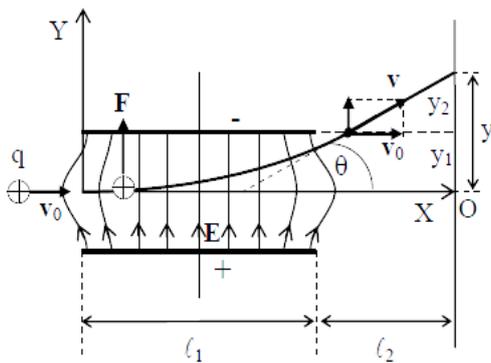


Рисунок 5.14

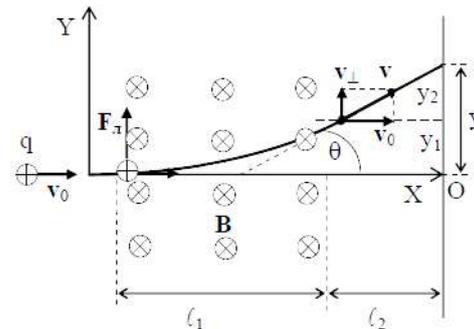


Рисунок 5.15

Смещение следа пучка электрическим полем может быть рассчитано по формуле

$$y = y_1 + y_2 = \frac{q}{m} E \frac{\ell_1}{v_0^2} \left( \frac{1}{2} \ell_1 + \ell_2 \right). \quad (5.35)$$

Ограничиваясь, случаем, когда отклонение пучка магнитным полем невелико, для расчета смещения получим формулу

$$y = \frac{q}{m} B \frac{\ell_1}{v_0} \left( \frac{1}{2} \ell_1 + \ell_2 \right). \quad (5.36)$$

Воздействие магнитного поля на движущиеся заряды приводит к перераспределению тока по сечению проводника, что проявляется в различных термомагнитных и гальваномагнитных явлениях (таких, как эффект Нернста Эттингсхаузена, эффект Холла и др.).

Гальваномагнитные явления – это совокупность явлений, связанных с действием магнитного поля на электрические (гальванические) свойства твердых проводников, по которым течет ток. Различают поперечные и продольные гальваномагнитные явления.

Наиболее существенны поперечные гальваномагнитные явления, когда магнитное поле  $\mathbf{H}$  перпендикулярно плотности тока в проводниках  $\mathbf{j}$ . К ним относятся:

- а) эффект Холла - возникновение разности потенциалов (ЭДС Холла);
- б) магниторезистивный эффект - изменение электрического сопротивления  $R$  проводника.

К продольным гальваномагнитным явлениям относится небольшое изменение удельного сопротивления  $\Delta\rho_{\parallel}$  в поле  $\mathbf{H} \parallel \mathbf{j}$ . В тонких пленках и проволоках  $(\Delta\rho/\rho_0)_{\parallel}$  и  $(\Delta\rho/\rho_0)_{\perp}$  зависят от размеров и формы образца (размерные эффекты). С ростом  $\mathbf{H}$  эта зависимость исчезает.

Гальваномагнитные явления в ферромагнетиках обладают рядом особенностей, обусловленных существованием самопроизвольной намагниченности в отсутствие магнитного поля.

Основная причина гальваномагнитных явлений –искривление траекторий носителей заряда (электронов проводимости и дырок) под влиянием магнитного поля.

Траектории носителей зарядов могут существенно отличаться от траектории свободного электрона в магнитном поле - круговой спирали, навитой на магнитную силовую линию. Разнообразие траекторий носителей заряда у различных проводников является причиной многообразия гальваномагнитных явлений.

Мерой влияния магнитного поля на движение носителей является отношение длины свободного пробега носителей  $\ell$  к радиусу кривизны  $r_H$  траектории в поле, напряженность которого  $\mathbf{H}$ . По отношению к гальваномагнитным явлениям магнитное поле считается слабым, если  $H \ll H_0$ , и сильным, если  $H \gg H_0$ .

При комнатной температуре для металлов и хорошо проводящих полупроводников  $H_0 \sim 10^5 - 10^6$  Э, для плохо проводящих полупроводников  $H_0 \sim 10^8 - 10^9$  Э.

С понижением температуры длина свободного пробега  $\ell$  увеличивается, и поэтому уменьшается  $H_0$ . Это позволяет, используя обычные магнитные поля  $10^4$  Э, осуществлять условие  $H \gg H_0$ .

При низких температурах при изменении магнитного поля наблюдается эффекты Шубникова-де Хааза и Нернста-Эттингсхаузена.

Эффект Шубникова-де Хааза – зависимость электрического сопротивления  $\rho$  монокристаллических проводников от обратного магнитного поля  $H^{-1}$  (открыт Л.В. Шубниковым и

голландским физиком В. де Хаазом в 1930 г. в монокристалле  $\text{Bi}$ ). Этот эффект является результатом квантования движения электронов в плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{H}$ . Он используется для определения формы поверхности Ферми, а также эффективной массы электронов проводимости в полупроводниках.

Эффект Нернста-Эттингсхаузена заключается в возникновении в твердых проводниках при наличии градиента температуры и перпендикулярного магнитного поля  $\mathbf{H}$  электрического поля  $\mathbf{E}_N$ . (Открыт в 1886 г. Немецким физиком В. Нернстом и австрийским физиком А. Эттингсхаузенем.) Различают продольный эффект, когда поле  $\mathbf{E}_N$  возникает в направлении, параллельном градиенту температуры (изменение термоЭДС с полем  $\mathbf{H}$ ), и поперечный, когда поле  $\mathbf{E}_N$  появляется в направлении, перпендикулярном  $\mathbf{H}$  и градиенту температуры. Количественной характеристикой поперечного эффекта является коэффициент Нернста, который пропорционален  $\mathbf{H}$  в случае слабых магнитных полей и обратно пропорционален в случае сильных полей. Эффект Нернста-Эттингсхаузена обусловлен искривлением траектории носителей заряда в магнитном поле.

## 5.9 Применение электронных пучков в науке и технике. Понятие об электронной оптике

Управление характером движения заряженных частиц электрическим и магнитным полями нашло широкое применение в различных областях науки и техники. Интересы практики стимулировали систематизацию вопросов, связанных с управлением и направлением электронных и ионных пучков, в результате чего удалось установить аналогию между электронными (ионными) пучками и световыми лучами. Эта аналогия позволяет говорить об электронной (ионной) оптике, электронно – оптических системах и, в частности, об основных составляющих этих систем – электронных и магнитных линзах.

Оказывается, что в электронной оптике справедливы законы отражения и преломления электронных (ионных) пучков, аналогичные законам отражения и преломления световых лучей.

Так, например, если заряженные частицы (пучок электронов) падают под некоторым углом на две плоские металлические сетки (рис. 5.16,а), между которыми приложено напряжение  $U$  (своеобразные пластины плоского конденсатора), то, попав в электрическое поле (в точке «а») сетчатого конденсатора, они будут тормозиться. Если напряжение между сетками достаточно велико, электроны, описав параболу с вершиной в точке «в», выйдут из конденсатора в точке «б» с той же по величине скоростью, с которой они двигались до попадания в электрическое поле. Это связано с тем, что нормальная составляющая скорости электронов  $v_n$  к эквипотенциальным поверхностям электрического поля в конденсаторе будет уменьшаться. В точке «в» составляющая  $v_n$  обратится в нуль, а затем изменит свое направление. Тангенциальная составляющая скорости  $v_t$ , параллельная эквипотенциальным поверхностям, изменяться не будет. В результате электроны будут двигаться по параболе. Так как при движении от точки «а» к точке «в» и от точки «в» к точке «б» они проходят одинаковую разность потенциалов, то абсолютное значение скорости  $v_n$  в точке «б» будет то же, что и в точке «а». Следовательно, электроны выйдут из конденсатора под тем же углом, под которым они вошли в конденсатор. Надо заметить, что падающий и отраженный электронные пучки находятся в одной и той же плоскости с нормалью к эквипотенциальным поверхностям. В этом и заключается физическая сущность закона отражения электронных пучков электрическим полем. На рис. 5.16,б показано отражение оптических лучей от плоского зеркала.

Если разность потенциалов между пластинами недостаточна для того, чтобы обратить в нуль скорость  $v_n$ , то электроны выйдут из электрического поля через другую пластину конденсатора. Однако направление выходящего электронного пучка изменится, хотя он лежит в той же плоскости, что и падающий пучок, и нормаль к эквипотенциальным поверхностям. При этом выполняются следующие случаи:

1. Если электроны движутся в направлении уменьшения потенциала (в конденсаторе существует тормозящее электрическое поле), то угол отклонения пучка оказывается больше, чем угол падающего луча.

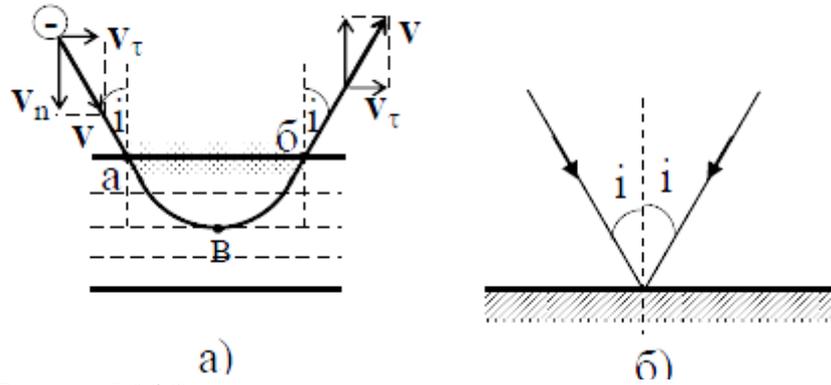


Рисунок 5.16 Отражение заряженных частиц и оптических лучей

2. Если электроны движутся в направлении увеличения потенциала (в конденсаторе существует ускоряющее электрическое поле), то угол отклонения пучка оказывается меньше, чем угол падающего луча.

Эти случаи аналогичны закону преломления света при его прохождении через границу раздела двух сред с различными показателями преломления: первый случай аналогичен прохождению света из среды с большим показателем преломления в среду с меньшим показателем преломления (из среды оптически более плотной в среду оптически менее плотную) (рис. 5.17). Второй случай аналогичен прохождению луча света из среды оптически менее плотной в среду оптически более плотную (рис. 5.18).

Количественная связь между преломлением электронных пучков и изменением потенциала можно установить из следующих рассуждений.

Известно, что показателем преломления среды называют отношение

$$n = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_2}{v_1},$$

где  $v_1$  – скорость электронов до их вхождения в электрическое поле;  $v_2$  – скорость электронов после прохождения электрического поля.

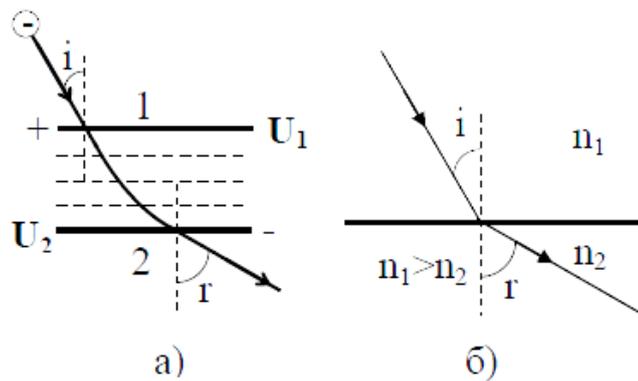


Рисунок 5.17

До вхождения электронов в электрическое поле они обладали кинетической энергией ( $W_1 = \frac{mv_1^2}{2}$ ), которую они могли приобрести, пройдя ускоряющую разность потенциалов  $U_1$ . При этом работа ускоряющей разности потенциалов

$$A_1 = eU_1.$$

После прохождения электронами электрического поля конденсатора их кинетическая энергия изменится, станет равной

$$W_2 = \frac{mv_2^2}{2}.$$

Согласно закону сохранения энергии, изменение кинетической энергии электронов будет равно  $\Delta W = -(A_1 - A_2)$ ,

где  $A_2$  – работа сил электрического поля конденсатора.

Имеем

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2} = e(U_1 - U_2) = e \cdot \Delta U.$$

С учетом того что  $\frac{mv_1^2}{2} = eU_1$  для отношения скоростей, следовательно, показателя преломления электронного пучка, получим

$$n = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{1 + \frac{\Delta U}{U_1}}.$$

Из соотношения видно, что показатель преломления второй области относительно первой для электронов зависит только от изменения потенциала на границе раздела между этими областями.

Отсюда следует, что эквипотенциальные поверхности являются как бы границами между областями с различными показателями преломления.

Таким образом, действительно электронные и ионные пучки подчиняются законам, подобным законам отражения и преломления лучей света. А это означает, что все выводы, которые получаются в световой оптике из этих законов, можно соответствующим образом применить и в электронной оптике.

Характерным для электронной оптики в отличие от световой оптики является то, что фактически никогда не имеется поверхностей, на которых потенциал изменялся бы скачкообразно. Потенциал электрического поля изменяется постепенно. Следовательно, не имеется поверхностей, на которых происходило бы преломление электронных пучков.

Создавая подходящие подобранные поля, можно создавать системы, которые действуют на электроны подобно тому, как действуют оптические системы на лучи света, и позволяют получать изображения объектов. То же можно сделать с помощью магнитных полей. Поэтому был создан раздел физики, изучающий условия получения изображений с помощью электронов и ионов и способы практического построения таких электронно-оптических систем – раздел электронной (и ионной) оптики.

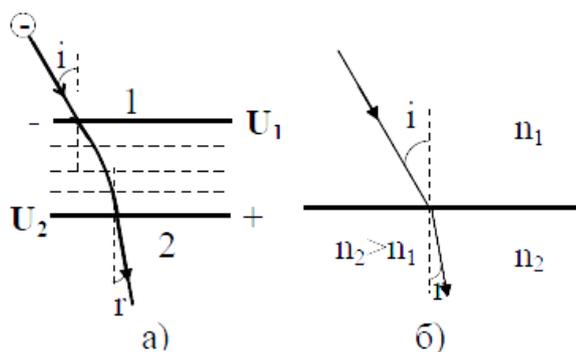


Рисунок 5.18

Одним из достижений электронной оптики является создание электронного микроскопа, позволяющего получать изображения малых объектов с помощью электронных пучков.

### Электронный микроскоп

В 1923 г. Луи де Бройль высказал гипотезу о том, что поскольку свет в одних случаях выступает как волна, а в других – как частица, то и микрообъекты (электроны) могли бы обладать волновыми свойствами. Длина волны, отвечающая материальной частице, связана с ее импульсом так

же, как в случае фотона, т.е. соотношением  $p = \frac{h}{\lambda}$ . Это означает, что длина волны  $\lambda$ , отвечающая частице с массой  $m$ , которая движется со скоростью  $v$ , определяется формулой

$$\lambda = \frac{h}{mv}.$$

Электронам соответствуют волны с длиной порядка  $10^{-10}$  м. Эти волны можно обнаружить экспериментально. Представление об электронах как носителях волновых свойств легло в основу разработки электронного микроскопа. В таких микроскопах объективом и окуляром служат магнитные линзы (магнитные поля, создаваемые током в обмотках катушек) (рис. 5.19). Электронам, ускоренным разностью потенциалов до энергий порядка  $10^5$  эВ, соответствуют длины волн примерно 0,004 нм. Такой порядок имеет и максимальная разрешающая способность. Однако aberrации магнитных линз ограничивают разрешающую способность электронных микроскопов величинами 0,2-0,5 нм. Такое разрешение в 103 раз выше достижимого при помощи оптических микроскопов и соответствует полезному увеличению от  $10^4$  до  $10^5$ .

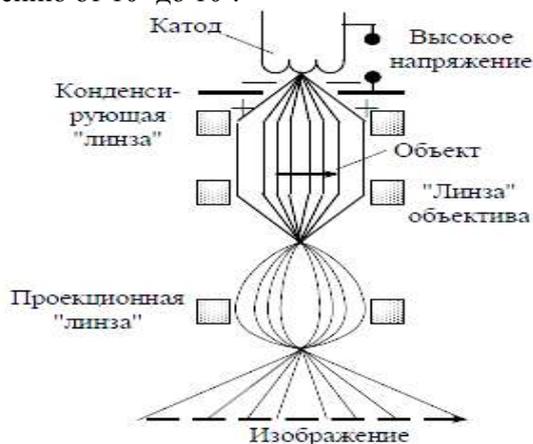


Рисунок 5.19 Электронный микроскоп

### Определение удельного заряда ионов. Масс – спектрографы

Одним из применений электронных пучков, движущихся в электромагнитных полях, является метод определения удельного заряда частиц - метод парабол Томсона (1907 г.). Метод парабол Томсона заключается в том, что узкий пучок положительных ионов проходит через область, в которой на него воздействуют одновременно параллельные друг другу электрическое и магнитное поля (рис.5.20). Поля вызывали отклонение ионов: магнитное - вдоль оси X, электрическое вдоль оси Y. Эти отклонения равны

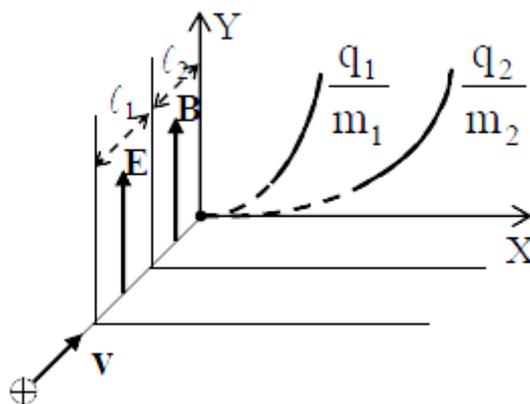


Рисунок 5.20 Отклонение ионов электромагнитных полях

$$x = \frac{q}{m} B \frac{\ell_1}{v} \left( \frac{1}{2} \ell_1 + \ell_2 \right), \quad (5.37)$$

$$y = \frac{q}{m} B \frac{\ell_1}{v^2} \left( \frac{1}{2} \ell_1 + \ell_2 \right). \quad (5.38)$$

Подставляя из формулы (5.37) в формулу (5.38) значение скорости  $v$ , получим

$$y = \frac{E}{B^2 \ell_1 (0,5\ell_1 + \ell_2)} \cdot \frac{m}{q} \cdot x^2. \quad (5.39)$$

Из формулы (5.39) следует, что ионы с одинаковыми удельными зарядами ( $q/m$ ) и различными скоростями  $v$  оставляют на фотопластинке, на которую они при выходе из поля попадают, след в виде параболы. Ионы с различными удельными зарядами движутся по разным параболам.

Бейнбридж усовершенствовал метод Томсона, обеспечив более надежную индикацию ионов по  $q/m$ . Ионы вначале проходят через селектор (рис. 5.21), который выделяет из пучка ионы с одинаковыми скоростями  $v$ . В селекторе ионы подвергаются одновременному воздействию взаимно перпендикулярных электрического и магнитного полей, отклоняющих ионы в противоположные стороны. Через выходную щель селектора проходят только те ионы, для которых  $qE = qvB$ , следовательно,

$$v = \frac{E}{B} = \text{const.}$$

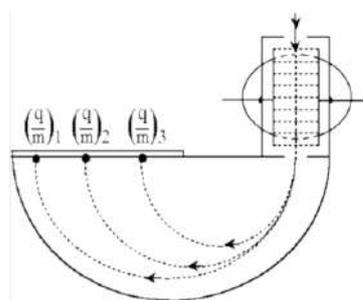


Рисунок 5.21 Траектория ионов

Выйдя из селектора, ионы попадают в область перпендикулярного к их скорости однородного магнитного поля с индукцией  $\vec{B}'$ . В этом поле они движутся по окружностям, радиусы которых зависят от  $q/m$ :

$$R = \frac{m v}{q B'}.$$

Описав половину окружности, ионы попадают на фотопластинку и оставляют на фотопластинке след в виде узкой полоски. Поскольку заряды ионов являются целыми кратными элементарного заряда  $e$ , по найденным значениям  $q/m$  можно определить массы ионов.

В настоящее время создано множество различных приборов для индикации ионов под общим названием: масс-спектрографы, ускорители заряженных частиц (циклотрон, фазотрон, синхрофазотрон).

### Вопросы для контроля знаний

1. Явление электромагнитной индукции.
2. Основной закон электромагнитной индукции.
3. Правило (закон) Ленца.
4. Вывод основного закона электромагнитной индукции из закона сохранения и превращения энергии.
5. Явление самоиндукции.
6. Коэффициенты индуктивности и взаимной индуктивности.
7. Явление самоиндукции при замыкании и размыкании электрической цепи.
8. Энергия магнитного поля.
9. Объемная плотность энергии магнитного поля.
10. Движение заряженных частиц в однородном электрическом поле.
11. Движение заряженных частиц в однородном магнитном поле.
12. Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях.

13. Гальваномагнитные явления.
14. Применение электронных пучков в науке и технике.
15. Понятие об электронной оптике.
16. Электронный микроскоп.
17. Определение удельного заряда ионов.
18. Масс-спектрографы.

## Глава 6. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ. ТЕОРИЯ МАКСВЕЛЛА

### 6.1. Нелинейный осциллятор. Физические системы, содержащие нелинейность

В общем случае осциллятор – это физическая система, совершающая колебательные движения. Термином «осциллятор» пользуются для любой системы, если описывающие ее величины периодически меняются со временем.

Классический осциллятором является механическая система, совершающая колебания около положения устойчивого равновесия (например, математический маятник, груз на пружине). Для такого осциллятора характерно то, что в положении равновесия потенциальная энергия  $W_p$  системы имеет минимум. Если отклонения  $x$  от этого положения малы, то в разложении  $W_p(x)$  по степеням  $x$  можно принять

$$W_p = \frac{kx^2}{2}$$

где  $k$  - коэффициент квазиупругой силы.

При этом квазиупругая сила определяется соотношением

$$F = -\frac{dW_p}{dx} = -kx$$

Такие осцилляторы называются гармоническими, их движение описывается линейным уравнением

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$$

решение которого имеет вид

$$x = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

где  $m$  - масса осциллятора;

$A$  - амплитуда колебаний;

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  - круговая или циклическая частота;

$\varphi$  - начальная фаза колебаний;

$t$  - время.

Полная энергия гармонического осциллятора является суммой периодически меняющихся в противофазе кинетической ( $W_k$ ) и потенциальной ( $W_p$ ) энергий, независимой от времени:

$$W = W_k + W_p = \frac{m\omega^2 A^2}{2}$$

Когда отклонение  $x$  нельзя считать малым, в разложении  $W_p(x)$  необходимо учитывать члены более высокого порядка. Уравнения движения становятся нелинейными, т.е. такими, в которых переменные и производные их входят в высших степенях, например, в третьей степени.

Примером такого уравнения может служить уравнение генератора электромагнитных волн, которое содержит третью степень производной по «у»:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = \left( \alpha - \gamma \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right) \frac{dy}{dt}$$

Осциллятор, удовлетворяющий нелинейным уравнениям, называют нелинейным или ангармоническим.

Голландский физик Ван дер Поль в ряде работ (с 1920 г.) дал приближенные решения некоторых нелинейных уравнений и тем самым положил начало изучению нелинейных колебаний. Большой вклад в развитие теории нелинейных колебаний внес академик Андронов (1901-1952).

Понятие «осциллятор» применяется также к немеханическим колебательным системам. В частности, колебательный контур является электрическим осциллятором. Изменение (колебания) напряженностей электрического и магнитного полей в плоской электромагнитной волне также можно описывать с помощью понятия «осциллятор». Понятие «осциллятор» играет важную роль в теории твердого тела, электромагнитного излучения, колебательных спектров молекул. В квантовой механике задача о линейном (с одной степенью свободы) гармоническом осцилляторе решается с

помощью уравнения Шредингера (при  $W_p = \frac{kx^2}{2}$ ). Решение существует лишь для дискретного набора значений энергии

$$W_n = \frac{h}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

где  $n = 1, 2, \dots$

Важной особенностью энергетического спектра осциллятора является то, что уровни энергии  $W_n$  расположены на равных расстояниях. Так как правила отбора разрешают в данном случае переходы только между соседними уровнями, то, хотя квантовый осциллятор имеет набор

собственных частот  $\omega_n = 2\pi \frac{W_n}{h}$ , излучение его происходит на одной частоте  $\omega$ , совпадающей с

частотой классического осциллятора  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . В отличие от классического осциллятора возможное

наименьшее значение энергии (при  $n = 0$ ) квантового осциллятора равно не нулю, а  $W_0 = \frac{h\omega}{4\pi}$  (нулевая энергия).

Нелинейные системы – это колебательные системы, свойства которых зависят от происходящих в них процессов. Колебания таких систем описываются нелинейными уравнениями. Нелинейными являются: механические системы, в которых модули упругости тел зависят от деформаций последних или коэффициент трения между поверхностями тел зависит от относительной скорости этих тел (скорости скольжения); электрические системы, содержащие сегнетоэлектрики, диэлектрическая проницаемость которых зависит от напряженности электрического поля.

Указанные зависимости в механических системах приводят соответственно либо к нелинейности связей между напряжениями и деформациями (нарушению закона Гука), либо к нелинейной зависимости сил трения от скорости скольжения, либо к нелинейной связи между действующей на тело силой и сообщаемым ему ускорением (если при этом скорость тела меняется по величине).

Аналогично в электрических системах оказываются нелинейными: связь между электрическими зарядами и напряженностью создаваемого ими поля; связь между напряжением на концах проводника и силой протекающего по нему электрического тока (нарушение закона Ома); связь между силой тока напряженностью создаваемого им магнитного поля (магнитной индукцией) в магнетике.

Каждая из этих нелинейных связей приводит к тому, что дифференциальные уравнения, описывающие поведение нелинейных систем, оказываются нелинейными. Поэтому и системы называются нелинейными.

Все физические системы, строго говоря, являются нелинейными. Поведение нелинейных систем отлично от поведения линейных систем. Одна из наиболее характерных особенностей нелинейных систем заключается в нарушении принципа суперпозиции. Искажение в нелинейных системах формы гармонического внешнего воздействия и нарушение принципа суперпозиции

позволяют осуществлять с их помощью генерирование и преобразования частоты электромагнитных колебаний - выпрямление, умножение частоты, модуляцию колебаний.

## 6.2. Получение электромагнитных колебаний. Собственные электромагнитные колебания.

Известно, что колебательные движения – это такие движения, которые отличаются той или иной степенью повторяемости.

Рассматривая механические колебания, было установлено, что переменными величинами в них могут быть: смещение, амплитуда, фаза и другие величины.

В электромагнитных колебаниях периодически изменяющимися величинами являются: заряды, токи, напряжения, электрические и магнитные поля, связанные с токами.

Электромагнитные колебания получают в устройствах, которые называются колебательными контурами (открытых и закрытых).

Закрытый колебательный контур представляет собой электрическую цепь, состоящую из конденсатора емкостью  $C$ , катушки (соленоида) с индуктивностью  $L$ , сопротивления  $R$ , соединенных последовательно (рис. 6.1).

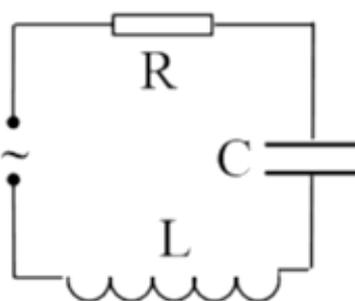


Рисунок 6.1 Закрытый колебательный контур RLC

Рассмотрим закрытый колебательный контур, состоящий только из конденсатора емкостью  $C$  и катушки с индуктивностью  $L$  (рис. 6.2).

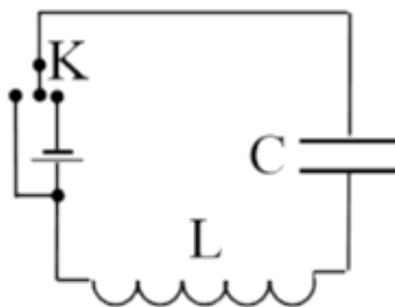


Рисунок 6.1 Закрытый колебательный контур LC

Для получения электромагнитных колебаний в такой цепи необходимо предварительно зарядить конденсатор.

В начальный момент времени  $t = 0$ : ток в цепи отсутствует  $I = 0$ , в конденсаторе существует электрическое поле с максимальным значением напряженности  $E = E_m$  и энергией

$$W_E = \frac{q^2}{2C}$$

После замыкания ключа «К», конденсатор начнет разряжаться, в контуре появится возрастающий электрический ток  $I$ , а в катушке индуктивности – магнитное поле с возрастающим значением напряженности  $H$  (индукции  $B$ ). Таким образом, по мере разрядки конденсатора его электрическое поле ослабевает, а магнитное поле катушки увеличивается.

В момент времени  $t_1 = \frac{T}{4}$  конденсатор полностью разрядится. Электрическое поле в нем будет отсутствовать ( $E = 0$ ). Величина тока достигнет максимального значения  $I = I_m$ . Напряженность магнитного поля катушки достигнет максимального значения  $H = H_m$ . Максимальной будет и энергия магнитного поля:

$$W_H = \frac{LI^2}{2}.$$

Затем магнитное поле будет ослабевать. На основании закона электромагнитной индукции в цепи будет возникать индукционный ток, направление которого такое же, какое имел ток разрядки конденсатора (согласно закону Ленца). Конденсатор будет перезаряжаться.

В момент времени  $t_2 = \frac{2T}{4}$  конденсатор полностью перезарядится. Напряженность электрического поля в нем достигнет максимального значения  $E = E_m$ , хотя направление вектора  $E$  будет противоположным первоначальному направлению. Ток в контуре прекратится ( $I = 0$ ). Напряженность магнитного поля соленоида станет равной нулю ( $H = 0$ ). Энергия контура вновь будет равна энергии электрического поля конденсатора.

Затем вновь начнет разряжаться конденсатор, в цепи появится электрический ток, направление которого противоположно току первоначальной разрядки. В катушке появится магнитное поле противоположного направления.

В момент времени  $t_3 = \frac{3T}{4}$  конденсатор полностью разрядится. Ток прекратится. Напряженность электрического поля станет равной нулю. Магнитное поле катушки вновь достигнет максимального значения, при этом  $H = -H_m$ , т.е. энергия контура будет равна энергии магнитного поля катушки.

В последующий момент времени магнитное поле начнет ослабевать, возникнет индукционный ток, препятствующий ослаблению магнитного поля, конденсатор начнет перезаряжаться.

В момент времени  $t_4 = \frac{4T}{4}T$  система возвратится в первоначальное состояние и начнется повторение рассмотренных процессов.

Таким образом, в закрытом колебательном контуре будут существовать изменяющиеся процессы с переменными характеристиками, возникнут электромагнитные колебания, которые сопровождаются периодическими взаимными превращениями энергий электрического и магнитного полей. Эти превращения энергий подобны превращению энергий при гармонических колебаниях, например, математического маятника.

Если бы в контуре не было потерь энергии (нагревание проводников, излучения), то электромагнитные колебания в нем совершались бы по гармоническому закону, были бы незатухающими.

Электромагнитные колебания, которые происходят в самом колебательном контуре, называются собственными колебаниями.

Уравнение собственных электромагнитных колебаний можно получить из следующих соображений. Считая, что мгновенное значение силы тока во всем контуре одно и то же, на основании второго закона Кирхгофа можно записать

$$-U_C = \mathcal{E}_c$$

Знак «минус» выбран потому, что положительное направление тока соответствует уменьшению положительного заряда конденсатора. Известно, что

$$U_c = \frac{q}{C}; \varepsilon_c = -L \frac{dI}{dt}.$$

Имеем

$$-\frac{q}{C} = -L \frac{dI}{dt}$$

или

$$L \frac{dI}{dt} - \frac{q}{C} = 0,$$

где  $I = -\frac{dq}{dt}$ .

С учетом значения  $I$  будем иметь

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$$

или

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0.$$

Откуда для круговой частоты собственных электромагнитных колебаний будем иметь

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \text{ а } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

Так как  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ , то для периода собственных электромагнитных колебаний получим

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (6.1)$$

Выражение (6.1) называют формулой Томсона.

Можно записать уравнения, согласно которым происходит изменение напряжения  $U_c$  и тока в контуре:

$$U_c = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} = \sin(\omega_0 t + \varphi) = U_0 \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

$$I = \frac{dq}{dt} = q_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) = I_0 \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

### 6.3. Затухающие электромагнитные колебания.

При рассмотрении электрических колебаний в простом закрытом колебательном контуре предполагалось, что активное сопротивление  $R$  (сопротивление проводников) равно нулю.

Так как любой проводник обладает определенным сопротивлением  $R$ , то колебания в реальном колебательном контуре с течением времени затухают. Это связано с выделением энергии на активном сопротивлении  $R$ , в результате чего энергия контура уменьшается.

На основании второго закона Кирхгофа для контура, содержащего активное сопротивление  $R$ , индуктивность  $L$  и емкость  $C$  (рис. 6.3), можно записать

$$U_R + U_C = \varepsilon_c$$

$$\text{где } U_c = \frac{q}{C} \quad \varepsilon_c = -L \frac{dI}{dt} = -L \frac{d^2q}{dt^2} \quad U_R = IR = R \frac{dq}{dt}.$$

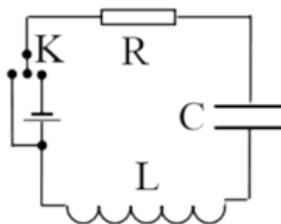


Рисунок 6.3 Закрытый колебательный контур RLC

Следовательно,

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad (6.2)$$

Уравнение (6.2) является уравнением затухающих электромагнитных колебаний. С точки зрения математики, оно однородное, дифференциальное, второго порядка, решением которого является выражение вида

$$q = q_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (6.3)$$

где  $q_0 e^{-\delta t} = A$  - амплитуда колебаний;

$\delta$  - коэффициент затухания;

знак «минус» показывает, что с течением времени амплитуда колебаний уменьшается.

На рис. 6.4 представлены затухающие колебания, подчиняющиеся уравнению (6.3).

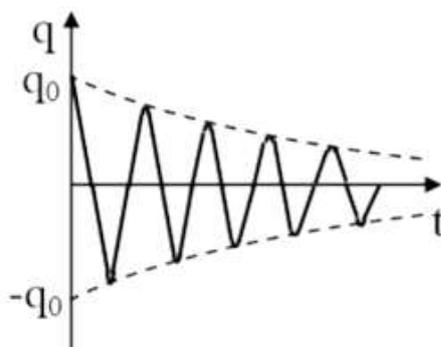


Рисунок 6.4 Затухающие колебания

Введя новую переменную  $Z = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ ;  $q = Ze^{-\delta t}$ , определив первую производную  $\frac{dq}{dt}$

и вторую производную  $\frac{d^2q}{dt^2}$ , подставив их в формулу (6.3), будем иметь

$$\frac{d^2Z}{dt^2} + (\omega_0^2 - \delta^2)Z = 0$$

где  $(\omega_0^2 - \delta^2) = \omega^2$  - условная циклическая частота.

Имеем

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + \omega_0^2 Z = 0. \quad (6.4)$$

Из формулы (6.22) действительно следует, что при  $\omega > 0$  решением этого уравнения является выражение вида

$$Z = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Таким образом, условная циклическая частота равна

$$\omega^2 = (\omega_0^2 - \delta^2); \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

Условный период

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}.$$

Названия «условная циклическая частота» и «условный период» обусловлены тем, что затухающие электромагнитные колебания не являются строго периодическими, так как изменяющаяся функция  $q = f(t)$  не принимает через равные промежутки времени одинаковые значения.

Период собственных электромагнитных колебаний  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$  меньше условного периода затухающих колебаний  $T$ , т.е. наличие активного сопротивления  $R$  замедляет колебания.

Характеристиками затухающих электромагнитных колебаний являются: декремент и логарифмический декремент колебаний.

Декрементом затухания называют отношение двух последовательных значений  $q$ , отличающихся по времени на период:

$$D = \frac{q_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t + \varphi)}{q_0 e^{-\delta(t+T)} \cos[(\omega_0(t+T) + \varphi)]} = e^{\delta T}.$$

Логарифмический декремент численно равен натуральному логарифму от декремента затухания:

$$\lambda = \ln D = \delta T.$$

Если коэффициент затухания  $\delta$  характеризует затухание колебаний за единицу времени, то логарифмический декремент затухания характеризует затухание колебаний за период.

Анализ выражения для условного периода колебаний  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$  показывает, что при

$R \rightarrow 0, \omega_0^2 > \delta^2; T \approx T_0$ . При  $R \rightarrow \infty$   $T$  имеет смысл при условии  $(\omega_0^2 > \delta^2) > 0$ . Если  $(\omega_0^2 > \delta^2) = 0$ , то  $T \rightarrow \infty$ . В этом случае колебания быстро затухают. Такие колебания называют апериодическими. Можно показать, что условием возникновения апериодических колебаний является выражение

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Одной из характеристик колебательного контура является его добротность  $Q$ :

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\delta\Gamma} = \frac{2\pi}{2\delta\Gamma} = \frac{\omega}{2\delta}.$$

где  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ;  $\delta = \frac{R}{2L}$ .

Тогда С

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (6.5)$$

Зная добротность контура, можно судить об электромагнитных колебаниях, которые могут возникнуть в этом контуре.

#### 6.4 Вынужденные электромагнитные колебания. Резонанс

Если в колебательном контуре помимо ЭДС самоиндукции имеется некоторая ЭДС, изменяющаяся по какому-либо периодическому закону, например по закону синуса или косинуса, то в таком контуре будут существовать вынужденные электромагнитные колебания. Рассмотрим некоторый контур, состоящий из  $R, L, C$  и  $U \ \varepsilon = U_0 \cos \omega t$ . В этом случае рассеянная энергия контура восполняется за счет энергии, включенной ЭДС, а это и означает, что в контуре существуют незатухающие колебания, происходящие под действием вынуждающей силы (рис. 6.5).

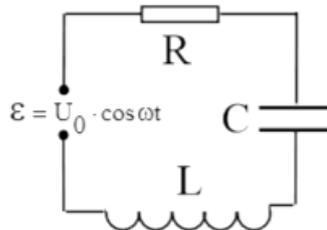


Рисунок 6.5 Колебательный контур с ЭДС

На основании второго закона Кирхгофа запишем уравнение вынужденных электромагнитных колебаний в виде

$$U_R + U_C = \varepsilon_c + \varepsilon$$

где

$$U_C = \frac{q}{C};$$

$$\varepsilon_c = -L \frac{dI}{dt} = -L \frac{d^2 q}{dt^2};$$

$$U_R = IR = R \frac{dq}{dt};$$

$$\varepsilon = U_0 \cos \omega t.$$

Имеем

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U_0 \cos \omega t$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = \frac{U_0}{L} \cos \omega t \quad (6.6)$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\delta \frac{dq}{dt} + \omega_0 q = \frac{U_0}{L} \cos \omega t$$

Уравнения (6.6) являются уравнениями вынужденных электромагнитных колебаний. Они неоднородные, т.е. содержат правую часть. Для однородных уравнений (т.е. уравнений без правой части) справедлив принцип суперпозиции, согласно которому сумма любых двух решений уравнения является решением того же уравнения. Для неоднородных линейных уравнений это несправедливо. Однако из теории колебаний известно, что общую задачу о вынужденных колебаниях под действием произвольно меняющейся силы можно свести к частной задаче о вынужденных колебаниях под действием синусоидальной силы. Дело в том, что согласно известной математической теореме Фурье всякая функция  $X(t)$  довольно общего вида может быть представлена в виде суммы синусоидальных функций. То есть общее решение неоднородного уравнения может быть представлено в виде суммы частного решения того же уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Поэтому решение уравнения (6.6) можно представить в виде

$$q = q_1 + q_2.$$

где  $q_1 = q_{01} \cdot \cos(\omega - \psi)$  - частное решение;

$q_2 = q_{02} \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi)$  - общее решение однородного уравнения.

С течением времени  $q_2$  уменьшается и при  $t \rightarrow \infty$  стремится к нулю.

Следовательно, установившиеся вынужденные электромагнитные колебания можно описать уравнением вида

$$q_1 = q_{01} \cdot \cos(\omega - \psi).$$

Решая уравнение вынужденных электромагнитных колебаний, можно получить

$$q_{01} = \frac{\frac{U_0}{L}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - 4\delta^2 \omega^2}}; \quad (6.7)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

или

$$q_{01} = \frac{U_0}{\omega} \cdot \frac{1}{\sqrt{(R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2)}};$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{R}{1/(\omega C - \omega L)}.$$

Анализируя выражение (6.7), можно сделать вывод: в случае, когда знаменатель данного выражения минимален,  $q_{01}$  стремится к максимальному значению.

Для определения условий, при которых это происходит необходимо исследовать знаменатель выражения (6.7) на минимум. Исследования приводят к следующему результату: частота соответствующая максимальному значению  $q_{01}$  (а следовательно, тока и напряжения) при вынужденных колебаниях равна

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \quad (6.8)$$

$$\text{где } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \text{ а } \delta = \frac{R}{2L}.$$

Явление резкого возрастания амплитудных значений переменных величин при электромагнитных колебаниях (в контуре) называется резонансом. Частота, при которой наблюдается резонанс, называется резонансной частотой (6.8). Характер резонансных кривых определяется значением сопротивления  $R$  (рис. 6.6).

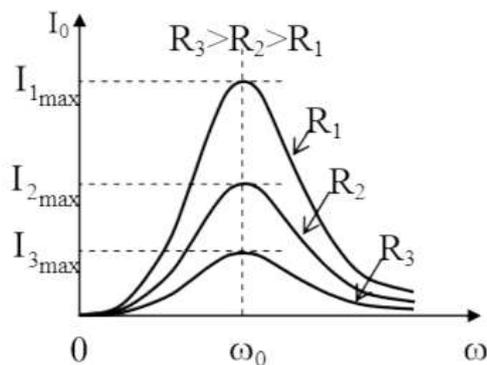


Рисунок 6.5 Резонансные кривые

Продифференцировав (6.5) по времени, будем иметь:

$$\frac{d^2 L}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = -\frac{U_0}{L} \omega \cos \omega t.$$

При установившемся режиме решение уравнения имеет вид

$$I = I_0 \sin(\omega t - \varphi). \quad (6.9)$$

Для амплитуды тока и разности фаз между током и внешней ЭДС можно получить

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (6.10)$$

Таким образом, амплитуда тока в контуре зависит от  $R$  и от соотношения между  $L$ ,  $C$  и  $\omega$ .

При постоянном сопротивлении  $R$  можно получить максимальную амплитуду тока, если  $L\omega = \frac{1}{\omega C}$ ;

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Тогда

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{R}; \quad \operatorname{tg} \varphi = 0; \quad \varphi = 0.$$

В этом случае сила тока изменяется в одной фазе  $\varphi = 0$  с внешней ЭДС, вследствие чего работа этой ЭДС в течение всего периода колебаний положительна. При  $\varphi \neq 0$  внешняя ЭДС в течение части периода совершает отрицательную работу, когда  $\varepsilon_0$  и  $I$  имеют различные знаки.

Условие  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , означает, что частота вынуждающей силы равна частоте собственных колебаний. При этом условии энергия, поступающая от внешнего источника в контур за один период колебаний, достигнет максимума, т.е. источник тока развивает полезную наибольшую мощность. Накопление энергии в контуре (следовательно, увеличение силы тока) происходит до тех пор, пока

сумма потерь за период не станет равной притоку энергии от внешнего источника тока за это же время. Очевидно, что при малых значениях  $R$  для этого потребуются большие токи. Большие значения амплитуды тока  $I_0$  при малых сопротивлениях  $R$  получаются из соотношения  $I_0 = \frac{\varepsilon_0}{R}$ .

Следует учесть, что большие токи могут вызвать сильное нагревание проводников, изменение их сопротивления и даже плавление.

Равенство частоты внешней ЭДС и частоты собственных колебаний контура иногда называют условием электрического резонанса. При этом амплитудные значения всех электрических и магнитных величин, изменяющихся при колебаниях, достигают наибольших значений.

Отметим, что при резонансе величина  $L\omega = \frac{1}{\omega C}$  амплитуда падения напряжения на конденсаторе равна амплитуде напряжения на катушке:

$$U_0 = \frac{q_0}{C} = \frac{I_0}{\omega C} = \frac{\varepsilon_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}};$$

$$\varepsilon_i = L\omega I_0 = \frac{\varepsilon_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Чем сильнее отличается частота внешней ЭДС от частоты собственных колебаний контура, тем, согласно (6.10), меньше амплитудные значения силы тока и связанных с ней величин.

Явление резонанса довольно широко применяется в различных областях науки и техники.

## 6.5 Основные положения теории Максвелла

Между электрическим и магнитным полями, как уже отмечалось, существует глубокая внутренняя связь, заключающаяся в том, что эти поля могут превращаться друг в друга. Всякое изменение магнитного поля сопровождается появлением электрического поля и, наоборот, всякое изменение электрического поля приводит к появлению магнитного поля. В результате образуется электромагнитная волна. Это взаимное превращение электрического и магнитного полей было открыто в начале второй половины XIX в. Максвеллом, который развил общую теорию электромагнитного поля в покоящихся средах. Теория Максвелла позволяет с единой точки зрения рассмотреть всю совокупность свойств электрических и магнитных полей.

Надо отметить, что возникшее при изменении магнитного поля электрическое поле существенно отличается от электростатического поля. Известно, что силовые линии электростатического поля всегда разомкнуты; они начинаются и заканчиваются на электрических зарядах, и в соответствии с этим напряжение по замкнутому контуру в электростатическом поле всегда равно нулю. По этой причине электростатическое поле не может поддерживать замкнутое движение зарядов и, следовательно, не может привести к возникновению электродвижущей силы.

Электрическое поле, возникающее в проводнике при изменении магнитного потока, связанного с ним (в результате электромагнитной индукции), не связано непосредственно с электрическими зарядами. Линии напряженности такого поля представляют собой замкнутые кривые (подобно линиям индукции магнитного поля). Поэтому его называют вихревым электрическим полем (рис. 6.6). Такое поле порождает в проводниках движение электрических зарядов по замкнутым траекториям и приводит к возникновению электродвижущей силы; при этом сторонними силами являются силы вихревого электрического поля. На рис. 6.6. показанное направление вектора  $E$  соответствует возрастанию вектора  $B$ . Электрическое напряжение по замкнутому контуру в этом поле не равно нулю; его значение между двумя какими-либо точками не определяется только положением этих точек, как это было отмечено в случае электростатического поля, но зависит от формы проводника (контура), соединяющего данные точки.

Таким образом, анализ явления электромагнитной индукции приводит к следующему выводу, выражающему первое основное положение теории Максвелла: *переменные электрическое и магнитное поля не могут существовать отдельно, независимо друг от друга; одно поле порождает другое. Они существуют всегда вместе в виде единого электромагнитного поля, которое в каждой*

точке пространства характеризуется векторами  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Или всякое изменение магнитного поля вызывает появление вихревого электрического поля.

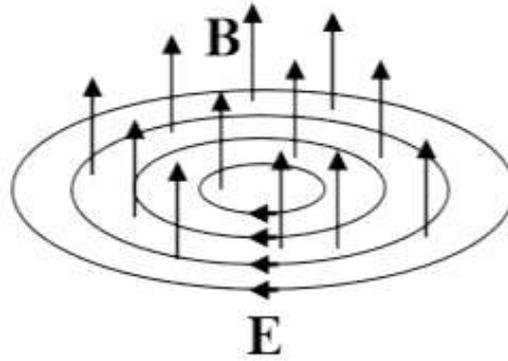


Рисунок 6.6 Вихревое электрическое поле

Работа вихревого электрического поля по перемещению положительного единичного заряда вдоль замкнутого неподвижного проводника численно равна ЭДС индукции в этом проводнике. Формально можно допустить, что заряды непрерывно распределены в какой-то части пространства (хотя на самом деле заряды дискретны, и речь может идти лишь о достаточно большой густоте их распределения). Тогда заряд, заключенный внутри некоторого объема  $V$ , находится путем интегрирования:

$$q = \int_V \rho dV$$

Предположив, что заряды могут распределяться в пространстве с различной объемной плотностью, теорему Остроградского-Гаусса можно представить в интегральной форме:

$$\oint_S \mathbf{E}_n dS = \frac{\int_V \rho dV}{\epsilon \epsilon_0} \quad (6.11)$$

Уравнение (6.11) является одним из уравнений Максвелла в интегральной форме.

Любое реальное электрическое поле в той или иной степени является неоднородным. Для аналитического описания неоднородного поля введем прямоугольную систему координат (рис. 6.7).

Выделим элементарный прямоугольный параллелепипед со сторонами  $dx, dy, dz$ .

Будем считать, что напряжённость  $\vec{E}$  в пределах элементарного объёма изменяется по линейному закону.

Так, если в точке с координатами  $x, y, z$

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$$

то в точке с координатами  $x + dx, y, z$

$$E_x = E_x(x) + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx$$

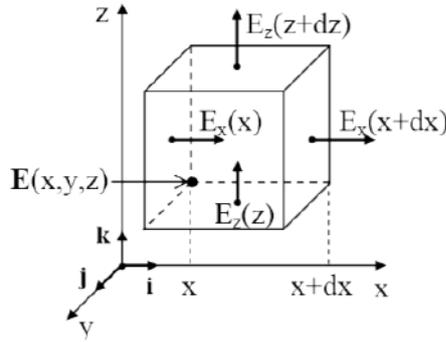


Рисунок 6.7 Неоднородное поле

Соответственно в точках  $x, y + dy, z$  и  $x, y, z + dz$  будем иметь

$$E_y = E_y(y) + \frac{\partial E_y}{\partial y} dy$$

$$E_z = E_z(z) + \frac{\partial E_z}{\partial z} dz$$

Грани параллелепипеда столь малы, что в пределах их поверхности нормальные к ним составляющие  $E_x, E_y, E_z$  остаются постоянными. При таких условиях через грани параллелепипеда проходят потоки вектора  $\vec{E}$ :

$$\Phi_x(x) = E_x dy dz; \quad \Phi_x(x + dx) = \left( E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx \right) dy dz;$$

$$\Phi_y(y) = E_y dx dz; \quad \Phi_y(y + dy) = \left( E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y} dy \right) dx dz;$$

$$\Phi_z(z) = E_z dx dy; \quad \Phi_z(z + dz) = \left( E_z + \frac{\partial E_z}{\partial z} dz \right) dx dy.$$

Соответственно приращение потока в направлении  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$$d\Phi_x = \frac{\partial E_x}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz;$$

$$d\Phi_y = \frac{\partial E_y}{\partial y} dx \cdot dy \cdot dz;$$

$$d\Phi_z = \frac{\partial E_z}{\partial z} dx \cdot dy \cdot dz.$$

Тогда приращение потока вектора напряженности электрического поля в пределах элементарного объёма

$$d\Phi = \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dx \cdot dy \cdot dz = \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \cdot dV$$

Выражение в скобках может быть записано с помощью известного оператора  $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$  и вектора  $\vec{E}$  в виде скалярного произведения двух векторов  $\nabla$  и  $\vec{E}$ :

$$(\nabla \vec{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \text{div} \vec{E}.$$

В этом случае выражение (2.15) будет иметь вид

$$d\Phi = \text{div} \vec{E} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \text{div} \vec{E} \cdot dV \quad (6.12)$$

Из выражения (7.11) следует, что полный поток линий напряженности электрического поля через произвольную замкнутую поверхность, охватывающую объем  $V$ , может быть получен путем интегрирования:

$$\Phi = \oint_S \vec{E}_n \cdot dS = \int_V \text{div} \vec{E} \cdot dV.$$

Воспользовавшись теоремой Остроградского-Гаусса, будем иметь

$$\int_V \text{div} \vec{E} \cdot dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \int_V p \cdot dV. \quad (6.13)$$

Из формулы (7.12) следует

$$\text{div} \vec{E} = \frac{p}{\varepsilon_0}. \quad (6.14)$$

Полученное соотношение (6.14) является одним из уравнений Максвелла в дифференциальной форме.

## 6.6 Представление ЭДС индукции с помощью теоремы Стокса

Возникновение индукционного тока в контуре свидетельствует о том, что при изменении магнитного потока через поверхность, ограниченную контуром (рис. 6.8), возникают сторонние силы и электроны движутся в поле с напряженностью  $\vec{E}$ . При этом ЭДС электромагнитной индукции

$$\varepsilon = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \int_L (\vec{E} \cdot d\vec{l}) \neq 0.$$

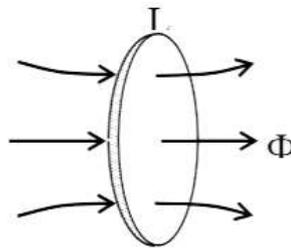


Рисунок 6.8

Известно, что теорема Стокса позволяет, выразить криволинейный интеграл через поверхностный интеграл. Если  $S$  - поверхность, ограниченная замкнутым контуром  $L$ , и рассматриваемый вектор  $\vec{E}$  является функцией трех переменных  $x, y, z$  (рис. 6.9), то имеет место утверждение: *циркуляция вектора напряженности электрического поля по замкнутому контуру  $L$  равна потоку ротации через любую поверхность  $S$ , ограниченную контуром  $L$ . Математически это утверждение можно записать так:*

$$\oint_L \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot}(\vec{E} \cdot d\vec{S})$$

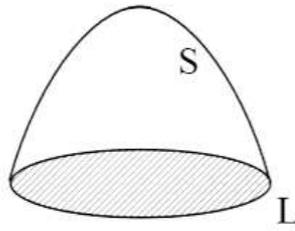


Рисунок 6.9

Для рассматриваемого случая имеем

$$\text{rot}\vec{E} = [\nabla\vec{E}] = \vec{i}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right).$$

Следовательно,

$$\int_S \text{rot}(\vec{E} \cdot d\vec{S}) = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \cdot \int_S (\vec{B} \cdot d\vec{S})$$

Откуда

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}. \quad (6.15)$$

Полученное математическое выражение закона электромагнитной индукции (6.15) известно, как одно из уравнений Максвелла в дифференциальной форме.

### 6.7 Представление циркуляции $\vec{H}$ с помощью теоремы Стокса

С помощью теоремы Стокса можно преобразовать теорему о циркуляции вектора напряженности магнитного поля  $\vec{H}$ .

Известно, что математически теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля может быть записана так:

$$\oint_L \vec{H}_1 \cdot d\vec{l} = \sum_i I_i$$

или

$$\oint_L \vec{H}_1 \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{j} \cdot d\vec{S})$$

С помощью теоремы Стокса получаем

$$\oint_L \vec{H}_1 \cdot d\vec{l} = \int_S (\text{rot}\vec{H} \cdot d\vec{S}) = \int_S (\vec{j} \cdot d\vec{S}). \quad (6.16)$$

Из выражения (6.16) находим

$$(\text{rot}\vec{H} = \vec{j}), \quad (6.17)$$

где  $\vec{j}$  - плотность тока.

Формула (6.17) представляет математическое выражение теоремы о циркуляции  $\vec{H}$  в дифференциальной форме.

Надо отметить, что полученные соотношения (6.15) и (6.17) справедливы только для стационарных процессов (для постоянного тока).

Для нестационарных процессов, когда токи зависят от времени, эти формулы неверны. Для доказательства этого утверждения выполним операцию дивергенции от обеих частей равенства (7.17):

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{H}) = \operatorname{div}\vec{j}$$

или

$$\nabla \cdot [\nabla\vec{H}] = (\nabla\vec{j}).$$

Так как с математической точки зрения  $\operatorname{div} \cdot \operatorname{rot} = 0$ , то  $\nabla\vec{j} = 0$ , что выполняется только в случае постоянного тока, т.к. из уравнения непрерывности для тока  $\operatorname{div}\vec{j} = 0$  только для постоянного тока, когда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Если же ток переменный, то объемная плотность заряда в отдельных точках цепи является переменной величиной, следовательно,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0.$$

## 6.8 Ток смещения

Смысл уравнения основного закона электромагнитной индукции

$$\varepsilon = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \int_L (\vec{E} \cdot d\vec{l})$$

заключается в том, что изменяющееся магнитное поле создает вихревое электрическое поле, последнее в свою очередь вызывает в окружающем пространстве (веществе или вакууме) изменяющееся магнитное поле. Поскольку магнитное поле создается электрическим током, то вихревое электрическое поле следует рассматривать как некоторый ток, который протекает как в веществе, так и в вакууме. Максвелл назвал этот ток *током смещения*.

Таким образом, *ток смещения* – это изменяющееся со временем электрическое поле (вихревое электрическое поле), которое порождает магнитное поле так же, как и ток проводимости.

Механизм тока смещения можно установить, рассмотрев один из опытов А.А. Эйхенвальда. В этом опыте (рис. 6.10) диэлектрический диск  $D$  вращается между четырьмя неподвижными заряженными полудисками  $A, A_1, B, B_1$ . При прохождении точками диска  $D$  плоскости « $AB$ », перпендикулярной чертежу и разделяющей заряженные полудиски, меняется направление электрического поля (знак поля), действующего на диэлектрик. В результате чего происходит изменение знака поляризованных зарядов диэлектрика. Если вращение диска происходит, так как показано на рис. 6.10, то на левой стороне диска вместо положительных зарядов при переходе через плоскость « $AB$ » появляются отрицательные заряды, а на правой стороне вместо отрицательных зарядов появляются положительные заряды. Это означает, что в движущемся диске в плоскости « $AB$ » происходит как бы движение зарядов: слева направо положительных, а справа налево отрицательных. Эти движения зарядов, представляющие собой смещение зарядов в молекулах диэлектрика, образуют ток смещения в диэлектрике, текущий слева направо. Эйхенвальд установил, что токи смещения (как и конвекционные токи) создают магнитное поле.

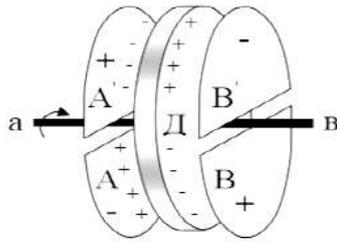


Рисунок 6.10 Механизм тока смещения

Токи смещения наблюдаются в конденсаторах, включенных в цепь переменного тока (рис. 6.11). Известно, что для постоянного тока конденсатор, включенный в цепь последовательно, является бесконечно большим сопротивлением, если его диэлектрик не обладает утечкой. В такой цепи лишь в момент ее замыкания протекает импульс зарядного тока, соответствующий небольшому смещению электронов проводимости. Если в цепи с конденсатором существует источник переменного тока, то в такой цепи за каждый период протекают токи заряда и разряда конденсатора. Сопротивление конденсатора при этом не бесконечно велико, а зависит от емкости конденсатора и частоты тока:

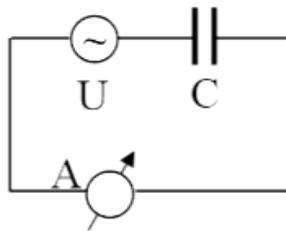


Рисунок 6.11 Цепь с конденсатором

$$R_c = X_c = \frac{1}{\omega C}.$$

В этом случае конденсатор необходимо рассматривать не как разрыв цепи, а как участок цепи с другим механизмом проводимости. Если между обкладками конденсатора находится полярный или поляризующийся в электрическом поле диэлектрик, то при приложении разности потенциалов к обкладкам конденсатора электрические заряды смещаются вдоль линий напряженности электрического поля. Это смещение зарядов (ионов) образует ток смещения в диэлектрике. Ток смещения существует не только в диэлектрике, но и в вакууме, где он представляет собой изменение напряженности электрического поля во времени.

Рассмотрим процессы, протекающие в схеме, представленной на рис. 6.11, где источник переменного тока (генератор), напряжение которого  $U$ , заряжает и перезаряжает конденсатор емкостью  $C$ . Если конденсатор плоский, то его емкость  $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ , заряд конденсатора  $q = CU$ . Тогда зарядный ток, который является током смещения, протекающий через конденсатор,

$$I_{cm} = \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\epsilon_0 S}{d} \cdot \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Плотность этого тока

$$j_{cm} = \frac{I}{S} = \epsilon_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{U}{d} \right) = \epsilon_0 \cdot \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial D}{\partial t}.$$

В векторной форме

$$j_{cm} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

где  $\mathbf{D}$  – вектор индукции электрического поля.

Так как  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ , где  $\vec{P}$  – вектор поляризации, то плотность тока смещения в диэлектриках

$$j_{cm} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t},$$

где  $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  – плотность тока смещения в вакууме;

$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$  – плотность тока поляризации (тока, обусловленного упорядоченным движением

электрических зарядов в диэлектрике), который представляет собой смещение зарядов в неполярных молекулах, поворот диполей в полярных молекулах.

Полный ток в проводящей цепи равен сумме тока проводимости (а также конвекционного тока) и тока смещения.

Поэтому плотность полного тока равна

$$j_{полн} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

где  $\vec{j}$  – вектор плотности тока проводимости.

Так как ток смещения определяется производной  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ , а не самой величиной вектора индукции электрического поля, то при убывании поля (например, внутри конденсатора, обладающего

проводимостью при его разрядке) производная отрицательна. Ток смещения  $I_{cm} = -S \cdot \left| \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right| = -\frac{\partial q}{\partial t}$

направлен от минуса к плюсу, в то время как ток проводимости всегда направлен от плюса к минусу, поэтому полный ток будет равен

$$I_{полн} = I_{пр} - I_{см}$$

При равенстве токов смещения и проводимости полный ток может быть равен нулю.

С учетом того что для полного тока  $\oint_L \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l} = \sum_i I_{полн_i}$ , имеем

$$\oint_L \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j}_n \cdot d\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{D}_n \cdot d\mathbf{S} \quad (6.18)$$

где  $j_n$  – проекция вектора плотности тока проводимости на направление положительной нормали к выбранной поверхности S;

$D_n$  – проекция вектора плотности индукции вихревого электрического поля на направление положительной нормали к выбранной поверхности S.

Уравнение (6.18) представляет собой обобщение закона полного тока на случай любых токов и выражает одно из основных положений теории Максвелла: *токи смещения (а также конвекционные токи) создают такие же магнитные поля, как и токи проводимости.*

## 6.9 Система уравнений Максвелла

Уравнения Максвелла являются фундаментальными уравнениями классической макроскопической электродинамики, описывающими электромагнитные явления в любой среде и в вакууме. Они сформулированы Дж. Максвеллом в 60-х годах XIX века на основе обобщения эмпирических законов электрических и магнитных явлений и развития идеи М. Фарадея о том, что

взаимодействия между электрически заряженными телами осуществляются посредством электромагнитного поля. Они связывают величины, характеризующие электромагнитное поле, с его источниками, т. е. с распределением в пространстве электрических зарядов и токов.

В вакууме электромагнитное поле характеризуется напряженностью электрического поля  $\mathbf{E}$  и вектором магнитной индукции  $\mathbf{B}$ , зависящими от пространственных координат и времени. Эти величины определяют силы, действующие со стороны поля на заряды и токи, распределение которых в пространстве задается объемной плотностью заряда  $\rho$  и плотностью электрического тока  $\mathbf{j}$ . Для описания электромагнитных процессов в материальной среде, кроме векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , вводятся вспомогательные векторные величины, зависящие от состояния свойств среды: индукция электрического поля  $\mathbf{D}$  и напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$ .

Уравнения Максвелла позволяют определить основные характеристики электромагнитного поля ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{H}$ ) в каждой точке пространства в любой момент времени, если известны плотность тока и объемная плотность заряда как функции координат и времени. Они могут быть записаны в интегральной или дифференциальной форме.

### Система уравнений Максвелла в интегральной форме

Уравнения Максвелла в интегральной форме определяют не векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{H}$  в отдельных точках пространства, а некоторые интегральные величины, зависящие от распределения этих характеристик поля: циркуляцию векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  вдоль произвольных замкнутых контуров и потоки векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{D}$  через произвольные замкнутые поверхности.

1. **Первое уравнение** является обобщением на переменные электромагнитные поля эмпирического закона Био-Савара-Лапласа о возбуждении магнитного поля электрическими токами. Оно показывает, что источниками магнитного поля могут быть не только движущиеся в проводниках электрические заряды (электрические токи), но и изменяющиеся во времени электрические поля в диэлектриках или вакууме. Величина, пропорциональная скорости изменения электрического поля во времени, была названа Максвеллом током смещения, который возбуждает магнитное поле по тому же закону, что и ток проводимости. Полный ток, равный сумме тока проводимости и тока смещения, всегда является замкнутым. Первое уравнение Максвелла свидетельствует о том, что циркуляция вектора напряженности магнитного поля вдоль замкнутого контура  $L$  определяется полным током через произвольную поверхность  $S$ , ограниченную данным контуром. Первое уравнение Максвелла имеет вид

$$\oint_L \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j}_n \cdot d\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{D}_n \cdot d\mathbf{S} \quad (6.19)$$

где  $\oint_L \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l}$  - циркуляция вектора напряженности магнитного поля;

$\mathbf{j}_n$  - проекция вектора плотности тока на направление положительной нормали к бесконечно малой площадке  $d\mathbf{S}$ , являющейся частью поверхности  $S$ ;

$\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{D}_n \cdot d\mathbf{S}$  - проекция вектора плотности тока смещения на ту же нормаль.

2. **Второе уравнение** является математической формулировкой закона электромагнитной индукции и записывается в виде

$$\oint_L \vec{\mathbf{E}} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \left( \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \right)_n \cdot d\mathbf{S}, \quad (6.20)$$

где  $\oint_L \vec{\mathbf{E}} \cdot d\mathbf{l}$  - циркуляция вектора напряженности результирующего поля, потенциального и вихревого;

$\mathbf{B}_n$  - проекция вектора индукции магнитного поля на направление положительной нормали к бесконечно малой площадке  $d\mathbf{S}$ , являющейся частью поверхности  $S$ ;

Знак «минус» – соответствует закону (правилу) Ленца для определения направления индукционного тока.

Уравнение (6.20) утверждает, что *циркуляция вектора напряженности результирующего электрического поля вдоль замкнутого контура  $L$  (ЭДС индукции) определяется скоростью изменения потока вектора магнитной индукции через поверхность  $S$ , ограниченную замкнутым контуром  $L$ .*

3. **Третье уравнение** отражает то свойство вектора  $\mathbf{B}$ , что его линии замкнуты или уходят в бесконечность (теорема Остроградского-Гаусса для магнитного поля). Это уравнение отображает опытные данные об отсутствии магнитных зарядов, аналогичных электрическим зарядам. Магнитное поле порождается только электрическим током.

Математически его можно записать так:

$$\oint_S \mathbf{B}_n \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (6.21)$$

Таким образом, *поток вектора магнитной индукции через произвольную замкнутую поверхность  $S$  равен нулю.*

4. **Четвертое уравнение** показывает, что линии вектора  $\mathbf{D}$  могут начинаться и оканчиваться на зарядах (теорема Остроградского-Гаусса для вектора  $\mathbf{D}$ ). Данное уравнение представляет собой обобщение закона взаимодействия неподвижных электрических зарядов (закона Кулона):

$$\oint_S \mathbf{D}_n \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho \cdot dV. \quad (6.22)$$

*Поток вектора индукции электрического поля через произвольную замкнутую поверхность  $S$  определяется электрическим зарядом, находящимся внутри этой поверхности (в объеме  $V$ , ограниченном поверхностью  $S$ ).*

### Система уравнений Максвелла в дифференциальной форме

Если считать, что векторы электромагнитного поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{H}$  являются непрерывными функциями координат, то, рассматривая циркуляцию  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  по бесконечно малым контурам и потоки векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{D}$  через поверхности, ограничивающие бесконечно малые объемы, можно от системы уравнений Максвелла в интегральной форме перейти к системе уравнений Максвелла в дифференциальной форме, характеризующих поле в каждой точке пространства:

$$1) \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad (6.23)$$

$$2) \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (6.24)$$

$$3) \operatorname{div} \vec{B} = 0; \quad (6.25)$$

$$4) \operatorname{div} \vec{D} = \rho; \quad (6.26)$$

Физический смысл уравнений Максвелла в дифференциальной форме аналогичен физическому смыслу этих уравнений в интегральной форме.

### Материальные уравнения

Уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной формах не образуют полной замкнутой системы, позволяющей рассчитывать электромагнитные процессы при наличии материальной среды. Поэтому систему уравнений Максвелла необходимо дополнить соотношениями, связывающими векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{j}$ , которые являются независимыми. Связь между ними определяется свойствами среды и ее состоянием, причем векторы  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{j}$  выражаются через вектор  $\mathbf{E}$ , а  $\mathbf{B}$  – через  $\mathbf{H}$ . Эти уравнения называются уравнениями состояния или материальными уравнениями. Они описывают электромагнитные свойства среды и для каждой конкретной среды имеют определенную форму. Для большинства изотропных сред, вплоть до значительных полей, уравнения состояния (материальные уравнения) имеют простую линейную связь:

1. **Первое** уравнение связывает векторы напряженности и индукции электрического поля:

$$\vec{e} = \varepsilon_0 \vec{E} \quad (6.27)$$

где  $\varepsilon(x, y, z)$  - диэлектрическая проницаемость среды;

$\varepsilon_0$  - диэлектрическая постоянная.

2. **Второе** уравнение связывает векторы индукции и напряженности магнитного поля:

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H} \quad (6.28)$$

где  $\mu(x, y, z)$  - магнитная проницаемость среды;

$\mu_0$  - магнитная постоянная.

3. **Третье** уравнение выражает закон Ома в дифференциальной форме

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} + \vec{j}_{cmp}. \quad (6.29)$$

где  $\gamma$  - удельная электропроводность;

$\vec{j}_{cmp}$  - плотность так называемых сторонних токов, т.е. токов, поддерживаемых любыми силами, кроме сил электрического поля (например, магнитным полем, диффузией).

Проницаемости  $\varepsilon$  и  $\mu$  определяют тот вклад в электромагнитное поле, который вносят связанные заряды, входящие в состав электрически нейтральных атомов и молекул вещества. Объемная плотность заряда  $\rho$  и плотность тока  $\mathbf{j}$  в материальных уравнениях – это плотности свободных зарядов и токов, причем вспомогательные векторы  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{H}$ , вводятся так, чтобы циркуляция вектора  $\mathbf{H}$  определялась только движением свободных зарядов, а поток вектора  $\mathbf{D}$  – плотностью распределения этих зарядов в пространстве. Материальные уравнения используются при решении уравнений Максвелла.

Из уравнений Максвелла вытекает ряд законов сохранения: закон сохранения электрического заряда, закон сохранения электромагнитной энергии. В частности, из уравнений

$$\oint_L \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j}_n \cdot d\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{D}_n \cdot d\mathbf{S} \quad \text{и} \quad \oint_S \mathbf{D}_n \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho \cdot dV.$$

можно получить уравнение непрерывности, представляющее собой закон сохранения электрического заряда: *полный ток, протекающий за единицу времени через любую замкнутую поверхность  $S$ , равен изменению заряда внутри объема  $V$ , ограниченного поверхностью  $S$ . Если ток через поверхность отсутствует, то заряд в объеме  $V$  остается неизменным:*

$$\oint_S \mathbf{j}_n \cdot d\mathbf{S} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \cdot dV$$

Если энергия электромагнитного поля не переходит в другие виды энергии, то, согласно уравнениям Максвелла, изменение энергии в некотором объеме за единицу времени равно потоку электромагнитной энергии через поверхность, ограничивающую этот объем.

Если внутри объема за счет энергии электромагнитного поля выделяется некоторое количество тепла, то закон сохранения энергии утверждает о том, что *изменение энергии электромагнитного поля в некотором объеме  $V$  равно сумме потока энергии электромагнитного поля и количества теплоты, выделившейся в этом объеме:*

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V w \cdot dV = - \left( \oint_S \Pi_n \cdot d\mathbf{S} + Q \right).$$

где  $w$  – энергия поля в единице объема;

$\Pi_n$  – проекция вектора Умова-Пойтинга на направление положительной нормали к поверхности  $dS$ ;

$Q$  – количество тепла, выделяемое в единицу времени.

Уравнения Максвелла приводят к фундаментальному выводу о конечности скорости распространения электромагнитных взаимодействий. Это означает, что при изменении плотности заряда или тока, порождающих электромагнитное поле, в некоторой точке пространства на расстоянии  $r$  от них поле изменится спустя время  $\tau = \frac{r}{c}$ . Вследствие конечной скорости

распространения электромагнитных взаимодействий, следовательно, возможно существование электромагнитных волн, частным случаем которых является свет, что было впервые доказано Максвеллом.

Это заключение называют вторым основным положением теории Максвелла: *электромагнитное поле, возникнув в одном месте пространства, не остается локализованным в нем, а распространяется от этого места в виде электромагнитной волны. Векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  электромагнитной волны взаимно перпендикулярны и перпендикулярны вектору скорости  $\mathbf{v}$ , с которой распространяется электромагнитная волна.*

## 6.9 Электромагнитные волны. Волновое уравнение.

### Волновое уравнение

Электромагнитная волна является одной из форм существования электромагнитного поля. Особенностью электромагнитных волн является то, что для своего распространения они не требуют наличия какой-либо среды и могут распространяться в вакууме.

Из теории Максвелла следует, что переменное магнитное поле порождает электрическое (также переменное), которое в свою очередь порождает переменное магнитное поле и т.д. Таким образом, если возбудить переменное электромагнитное поле, то в окружающем пространстве возникнет последовательность взаимных превращений электрического и магнитного полей. При этом если исходное электромагнитное поле носит периодический характер, то в окружающем пространстве распространяется электромагнитная волна той же частоты. Доказательством этого может служить волновое уравнение, полученное из системы уравнений Максвелла, записанных в виде

$$[\nabla \vec{E}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (6.30)$$

$$(\nabla \vec{B} = 0); \quad (6.31)$$

$$[\nabla \vec{H}] = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad (6.32)$$

$$\nabla \vec{D} = \rho; \quad (6.33)$$

$$D \propto \epsilon_0 \vec{E}; \quad (6.34)$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}; \quad (6.35)$$

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}. \quad (6.36)$$

В случае однородной электрически нейтральной ( $\rho = 0$ ), непроводящей  $\vec{j} = 0$  среды с постоянными проницаемостями  $\mu$  и  $\epsilon$  уравнения (6.30 – 6.33) можно переписать так:

$$[\nabla \vec{E}] = -\mu \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \quad (6.37)$$

$$(\nabla \vec{H} = 0); \quad (6.38)$$

$$[\nabla \vec{H}] = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad (6.39)$$

$$(\nabla \vec{E} = 0); \quad (6.40)$$

Осуществим операцию ротации от обеих частей уравнения (6.37), т.е. обе части этого уравнения умножим по правилам векторного умножения на оператор  $\nabla$  :

$$\left[ \nabla \times \left[ \nabla \times \vec{E} \right] \right] = -\mu\mu_0 \left[ \nabla \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right].$$

Изменение последовательности дифференцирования по координатам и времени приводит к равенству

$$\left[ \nabla \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \nabla \times \vec{H} \right]$$

Произведя такую замену и подставив в получившееся уравнение значение для ротора  $\vec{H}$ , получим:

$$\begin{aligned} A \times B \times C; \\ \left[ \nabla \times \left[ \nabla \times \vec{E} \right] \right] = -\mu\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Согласно правилам векторной алгебры для двойного векторного произведения, имеет место тождество

$$\left[ \vec{A} \times \left[ \vec{B} \times \vec{C} \right] \right] = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}).$$

Поэтому левую часть уравнения (6.41) можно представить следующим образом:

$$\left[ \nabla \times \left[ \nabla \times \vec{E} \right] \right] = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - (\nabla \cdot \nabla) \vec{E}.$$

В силу уравнения (6.40) первый член этого выражения равен нулю, поэтому приходим к уравнению

$$\nabla \vec{E} = -\mu\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

где  $v \equiv \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0 \varepsilon_0}}$ ;

$\Delta = (\nabla \cdot \nabla)$ - лапласиан.

Учитывая симметрию системы уравнений (6.37-6.40) относительно  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , аналогично получаем дифференциальное уравнение для вектора  $\vec{H}$ . Раскроем лапласиан:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}; \quad (6.42)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}; \quad (6.43)$$

Уравнения (6.42) и (6.43) представляют собой типичные волновые уравнения. Они описывают электромагнитную волну, распространяющуюся в среде со скоростью  $v \equiv \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0 \varepsilon_0}}$ . В вакууме

$$v = c = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

### Плоская электромагнитная волна

Простейшей электромагнитной волной является плоская синусоидальная волна, т.е. такая волна, фронт которой представляет плоскость, перпендикулярную направлению распространения, а в фиксированной точке изменение векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  происходит по закону синуса или косинуса.

Математически такая волна может быть представлена уравнениями (6.42) и (6.43).

Решениями дифференциальных уравнений (6.42) и (6.43) являются выражения

$$\begin{cases} E(r,t) = E_m \cdot \sin \omega \left( t \pm \frac{r}{v} \right) \\ H(r,t) = H_m \cdot \sin \omega \left( t \pm \frac{r}{v} \right) \end{cases} \quad (6.44)$$

где  $E(r,t), H(r,t)$  - мгновенные значения векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в данной точке пространства с координатой  $r$  и в данный момент времени  $t$ ;

$E_m, H_m$  - их максимальные значения;

$\omega \equiv \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$  - круговая или циклическая частота;

$\nu$  - частота колебаний.

Знак «минус» соответствует волне, распространяющейся в направлении возрастания  $r$ .

Расстояние между двумя точками, колебания в которых отличаются по фазе на  $2\pi$  (например, между двумя максимумами), называется длиной электромагнитной волны  $\lambda$ . Она равна расстоянию, на которое распространяется волна за время одного периода колебания  $T$ . Если  $v$  скорость распространения электромагнитной волны (скорость распространения фазы колебаний), то

$$\lambda = vT \quad (6.45)$$

Пользуясь соотношением (6.45) и учитывая, что  $\omega \equiv \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$  уравнения (6.33) можно записать и в следующем виде:

$$\begin{cases} E(r,t) = E_m \cdot \sin(\omega \mp kr), \\ H(r,t) = H_m \cdot \sin(\omega \mp kr) \end{cases}$$

где  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  - волновое число.

Волновой вектор  $\vec{k}$  направлен в сторону распространения волны; так, при распространении в вакууме  $v = c$  и  $\vec{k} = \left( \frac{\omega}{c} \right) \vec{c}$ .

Рассмотрим плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся в нейтральной непроводящей среде с постоянными проницаемостями  $\epsilon$  и  $\mu$ .

Направим ось  $OX$  перпендикулярно к волновым поверхностям (рис. 6.12).

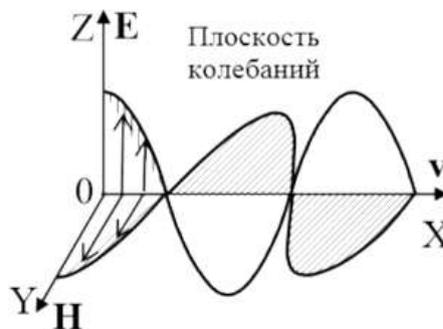


Рисунок 6.12 Плоская электромагнитная волна

Тогда  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  не будут зависеть от  $Y$  и  $Z$ , а будут зависимы только от  $X$ . В этом случае волновые уравнения для  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  можно записать так

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} &= \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} &= \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}.\end{aligned}\quad (6.46)$$

Решения этих дифференциальных уравнений (6.46) имеют вид

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_0 \cdot \cos(\omega t \mp kx), \\ \vec{H} &= H_0 \cdot \cos(\omega t \mp kx).\end{aligned}\quad (6.47)$$

В электромагнитной волне периодически одновременно в пространстве и во времени изменяются электрическое и магнитное поля, причем векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  взаимно перпендикулярны и перпендикулярны вектору скорости распространения волны  $\vec{v}$

Плоскость, в которой происходит колебания вектора  $\vec{E}$ , называется плоскостью колебаний, а перпендикулярная к ней плоскость, в которой происходят колебания вектора  $\vec{H}$ , называется плоскостью поляризации.

В научно-технической литературе вместо тригонометрического представления уравнений волны (6.37) часто используются экспоненциальные выражения (через комплексные экспоненты):

$$\vec{E} = E_0 \cdot e^{i(\omega t \mp kx)}; E = E_0 \cdot \exp[i(\omega t \mp kx)]; \quad (6.48)$$

$$\vec{H} = H_0 \cdot e^{i(\omega t \mp kx)}; H = H_0 \cdot \exp[i(\omega t \mp kx)]. \quad (6.49)$$

Представление уравнений волны в виде (6.48) и (6.49) значительно упрощает расчеты, делает их более компактными. Уравнения (6.48) и (6.49) также являются решениями дифференциальных уравнений (6.46). После выполнения всех преобразований над выражениями в экспоненциальной форме можно представить результат в «обычной» тригонометрической форме, для чего необходимо удержать только реальную часть. Этот вывод основан на эквивалентности тригонометрического и экспоненциального выражений комплексной величины, связанных формулами Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi; \quad e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \cdot \sin \varphi.$$

### Законы отражения и преломления электромагнитных волн

Пусть граница двух сред представляет собой плоскость (рис. 6.13).

Обе среды являются немагнитными ( $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ), имеют различные диэлектрические проницаемости  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ . На поверхность раздела сред под углом  $\alpha$  падает плоская электромагнитная волна. Если исходить из того, что обе среды электрически изотропны, то все три луча (падающий, отраженный и преломленный) лежат в одной плоскости. Запишем уравнения трех перечисленных волн: 1 - падающей, 2 - отраженной, 3 - преломленной:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})},$$

$$\vec{E}' = \vec{E}'_0 \cdot e^{i(\omega' t - \vec{k}' \cdot \vec{r})},$$

$$\vec{E}'' = \vec{E}''_0 \cdot e^{i(\omega'' t - \vec{k}'' \cdot \vec{r})}.$$

В данном случае начальная фаза колебания представлена как скалярное произведение волнового вектора  $\vec{k}$  и радиус-вектора  $\vec{r}$ , проведенного из начала координат. При совпадении направлений  $\vec{r}$  и ОХ получим введенное ранее выражение уравнения волны.

Известно, что касательная составляющая вектора  $\vec{E}$  не изменяется при переходе через границу раздела двух диэлектриков, поэтому

$$E_x + E'_x = E''_x,$$

т.е.

$$E_{0x} \cdot \exp[i(\omega t - k_x \cdot x)] + E'_{0x} \cdot \exp[i(\omega' t - k'_x \cdot x)] = E''_{0x} \cdot \exp[i(\omega'' t - k''_x \cdot x)].$$

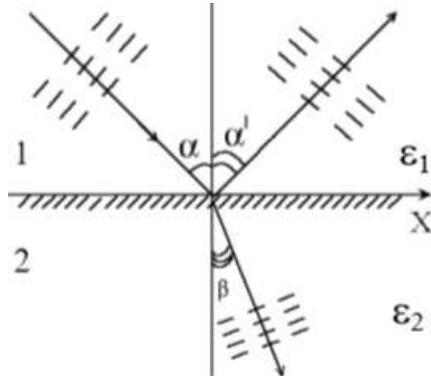


Рисунок 6.13 Отражения и преломления электромагнитных волн

Это равенство должно выполняться в любой момент времени  $t$  и в любой точке с координатой  $x$ . Первое означает, что  $\omega \equiv \omega' \equiv \omega''$ , т.е. частоты трех рассматриваемых волн одинаковы. Второе требование приводит к равенству

$$k_x \cdot x = k'_x \cdot x = k''_x \cdot x,$$

т.е.

$$k_x \equiv k'_x \equiv k''_x$$

но

$$k_x = k \cdot \sin \alpha, k'_x = k' \cdot \sin \alpha', k''_x = k'' \cdot \sin \beta.$$

Поэтому

$$k_x = k \cdot \sin \alpha, k'_x = k' \cdot \sin \alpha', k''_x = k'' \cdot \sin \beta.$$

но

$$k = \frac{\omega}{v}, k' = \frac{\omega}{v'}, k'' = \frac{\omega}{v''}, v = v'.$$

Следовательно,

$$k \cdot \sin \alpha = k' \cdot \sin \alpha',$$

что означает  $\alpha = \alpha'$ .

В свою очередь равенство  $k \cdot \sin \alpha = k'' \cdot \sin \beta$  приводит к известному закону преломления света:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} \equiv n_{21},$$

где  $n_{21}$  - относительный показатель преломления.

### Свет как электромагнитная волна

Одной из сложных физических проблем конца XIX и начала XX-го века являлась проблема о физической природе света. Одна из гипотез утверждала, что свет является волной. Однако опытных данных, подтверждающих эту гипотезу, было недостаточно. Наиболее важную роль в подтверждении этой гипотезы сыграли опыты по определению скорости света. Одним из них, отличающимся наиболее высокой точностью, является опыт американского физика-экспериментатора Майкельсона. Схема опыта показана на рис. 6.14. Свет от источника S (электрической дуги) попадая на «верхнюю косую» грань восьмигранной зеркальной призмы 1, способную вращаться вокруг собственной оси с

достаточно большой угловой скоростью  $\omega$ , отражался от нее, достигал зеркал рефлектора 2-3. Отражаясь зеркалами рефлектора, световой луч приходил на «нижнюю косую» грань призмы, которая направляла его в зрительную трубу Т для наблюдения многократно отраженного светового луча. Опыт был поставлен в природных условиях: зеркальная призма, источник и зрительная труба находились на вершине одной горы, а зеркальный рефлектор - на вершине другой, находящейся от первой горы приблизительно на расстоянии 35 км.

Нетрудно понять, что если призма совершала вращательное движение, то, вообще говоря, наблюдатель перестанет видеть источник света. Однако если за время прохождения светом удвоенного расстояния между призмой и рефлектором, равного  $2\ell$ , А призма «подставит» свою очередную грань, то наблюдатель зафиксирует свет на экране трубы. Таким образом, необходимо выполнение условия, при котором угол поворота призмы был равен

$$\varphi = \omega \cdot r = \frac{\pi}{4}.$$

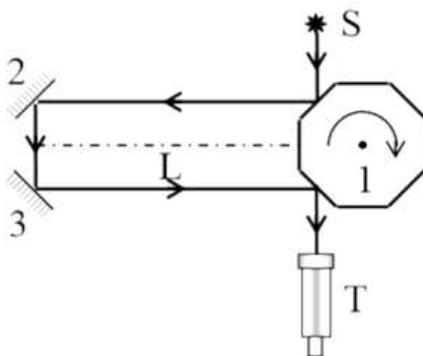


Рисунок 6.14 Схема опыта Майкельсона

Из опыта Майкельсона следовало, что скорость распространения света близка к значению  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ . Это значение с достаточной степенью точности совпадало со значением скорости распространения электромагнитной волны, вычисленным по формуле  $v \equiv \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ . В результате был

сделан вывод, о том что свет является электромагнитной волной. Этому способствовало также сходство законов отражения и преломления пучков заряженных частиц и света.

### Энергия электромагнитной (световой) волны. Вектор Умова-Пойнтинга

Электромагнитная волна, как и электромагнитное поле вообще, является носителем энергии. Основными энергетическими параметрами электромагнитной волны являются: объемная плотность энергии (энергия, приходящаяся на единицу объема), плотность потока энергии, интенсивность.

**Объемная плотность энергии.** Для плоской электромагнитной волны объемная плотность энергии равна сумме объемных плотностей энергии электрического  $w_{эл}$  и магнитного  $w_{м}$  полей. С учетом того, что между векторами  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в электромагнитной волне существует связь  $\sqrt{\epsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H$  для объемной плотности энергии электромагнитной волны имеем

**Плотность потока энергии** - это вектор  $\vec{S}$ , направленный по направлению вектора скорости электромагнитной (световой) волны  $\vec{v}$  и численно равный энергии, переносимый волной через нормальную единичную площадку в единицу времени. Вектор  $\vec{S}$  называют вектором Умова-Пойнтинга.

Для определения вектора Умова-Пойнтинга мысленно разместим внутри электромагнитной волны прямоугольный параллелепипед так, чтобы его боковые поверхности площадью  $\delta$  каждая были перпендикулярны к волновому вектору  $\vec{k}$  (рис. 6.15).

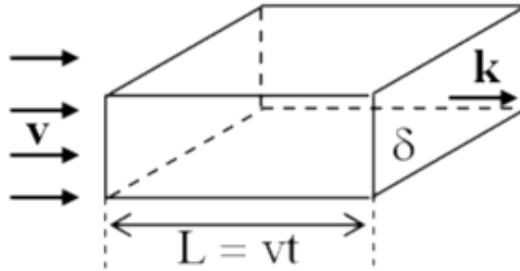


Рисунок 6.15

За единицу времени через боковую поверхность параллелепипеда волна перенесет энергию, равную  $W = w\delta vt$ .

Если считать, что продольный размер параллелепипеда равен  $L = vt$ , то через боковую поверхность за единицу времени переносится энергия электромагнитной волны, заключенная внутри такого параллелепипеда. В соответствии с определением  $\vec{S}$  будем иметь

$$S = \omega v = EH$$

или в векторной форме

$$\vec{S} = [\vec{E} \times \vec{H}].$$

Для плоской электромагнитной волны численное значение вектора Умова-Пойтинга равно

$$S = E_0 H_0 \cdot \cos^2(2\pi\nu t - kx). \quad (6.50)$$

Из выражения (6.50) видно, что в этом случае  $\vec{S}$  изменяется во времени с частотой  $2\omega$ .

**Интенсивность волны.** На практике представляет интерес усредненное во времени значение плотности потока энергии, которое называется интенсивностью электромагнитной волны.

Так как  $\cos^2 \Omega = \frac{1}{2}$ , то

$$I = \bar{S} = \frac{E_0 H_0}{2}$$

или

$$I = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} \cdot E_0^2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} \cdot H_0^2.$$

Таким образом, интенсивность волны пропорциональна квадрату амплитуды напряженности электрического (магнитного) поля.

Импульс электромагнитного поля

$$p = \frac{W}{c},$$

где  $W$  – энергия электромагнитного поля;

$c$  – скорость распространения электромагнитного поля в вакууме.

Соотношение между массой и энергией свободного электромагнитного поля является универсальным законом природы

$$W = mc^2.$$

## 6.10 Источники электромагнитного излучения

Заряженная частица, например электрон, движущаяся с постоянной скоростью, не излучает электромагнитных волн. Электромагнитное излучение возникает только при ускоренном ( $\vec{a} \neq 0$ ) движении заряженных частиц.

Так, рентгеновское излучение возникает в результате резкого торможения пучка электронов, соударяющихся с антикатодом.

Другим весьма важным для понимания многих физических процессов источником электромагнитных волн является электрический диполь, совершающий гармонические колебания (рис. 6.16). Электрический момент диполя изменяется во времени по гармоническому закону:

$$p = p_0 \cdot \cos \omega t,$$

где  $p_0 = q\ell_0$ .

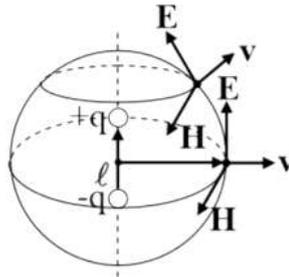


Рисунок 6.16 Электрический диполь

Возвратно-поступательное смещение электрического заряда равносильно существованию элемента тока, вокруг которого, согласно закону Био-Савара-Лапласа, возникает магнитное поле. Однако магнитное поле в данном случае будет переменным, т.к. вызывающий его элемент тока является изменяющимся. Переменное магнитное поле вызывает переменное электрическое поле - в среде распространяется электромагнитная волна. На больших расстояниях от диполя ( $r \gg \lambda$ ,  $\lambda$  - длина электромагнитной волны) волна становится сферической, в этой волне векторы  $\vec{H}$  и  $\vec{E}$  перпендикулярны друг к другу и к вектору скорости  $\vec{v}$ , который в свою очередь направлен по радиус-вектору  $\vec{r}$ . При этом вектор  $\vec{E}$  направлен по касательной к меридиану, а вектор  $\vec{H}$  - по касательной к параллели (в соответствии с законом Био-Савара-Лапласа). В случае электрического диполя, излучающего электромагнитную волну, электрические заряды обладают ускорением  $a_0 = \ell_0 \omega^2$ .

Аналогично возникает электромагнитное излучение при смещениях электронных оболочек относительно ядер атомов. Такое смещение может происходить либо в результате воздействия переменного электрического поля, либо в результате тепловых колебаний атомов вещества. Последний механизм является причиной так называемого «теплого излучения» нагретых тел.

Интересно отметить, что при периодических деформациях магнитного диполя также излучается электромагнитная волна.

На рис. 6.17 показан магнетик цилиндрической формы, намагниченный вдоль оси. Продольная деформация цилиндра (при постоянстве радиуса) при-

ведет к изменению намагниченности  $\vec{j}$  и магнитного момента:

$$\sum_i \vec{p}_{m_i} = \vec{J}V.$$

Периодическая деформация намагниченного цилиндра сопровождается периодическим изменением магнитного момента и излучением электромагнитной волны. Однако в данном случае вектор  $\vec{H}$  направлен по касательной к меридиану, а вектор  $\vec{E}$  - по касательной к параллели на сферической волновой поверхности.

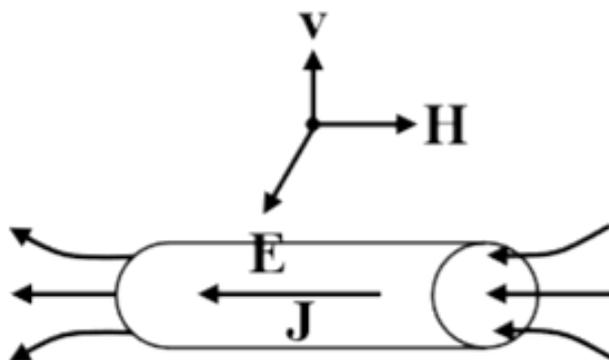


Рисунок 6.17 Магнетик цилиндрической формы

### Вопросы для контроля знаний

1. Нелинейный осциллятор.
2. Физические системы, содержащие нелинейность.
3. Получение электромагнитных колебаний.
4. Собственные электромагнитные колебания.
5. Дифференциальное уравнение собственных электромагнитных колебаний и его решение.
6. Затухающие электромагнитные колебания.
7. Дифференциальное уравнение затухающих электромагнитных колебаний и его решение.
8. Характеристики затухающих электромагнитных колебаний. Вынужденные электромагнитные колебания.
9. Дифференциальное уравнение вынужденных электромагнитных колебаний и его решение.
10. Резонанс.
11. Основные положения теории Максвелла.
12. Вихревое электрическое поле.
13. Представление ЭДС индукции с помощью теоремы Стокса. Представление циркуляции вектора напряженности магнитного поля с помощью теоремы Стокса.
14. Ток смещения.
15. Система уравнений Максвелла.
16. Электромагнитные волны.
17. Волновое уравнение.
18. Энергия электромагнитной (световой) волны.
19. Вектор Умова-Пойтинга.
20. Источники электромагнитного излучения.

## Глава 7. ЭФФЕКТ ХОЛЛА

### 7.1 Квантование в микро– и макромире

Известно, что физику можно разделить на классическую и современную физику. Современная физика – это физика квантовая. Одно из основных проявлений квантовых закономерностей состоит в том, что ряд физических величин, таких, как энергия, импульс, момент импульса (момент количества движения), в определенных условиях квантуются, то есть могут принимать только дискретный ряд значений. Например, квантуются энергия и момент количества движения электронов в атоме. В начальный период после создания квантовой теории считалось, что квантование свойственно только процессам, происходящим в микромире - в атомах, атомных ядрах и т. д., то есть таким процессам, которые протекают в малых, порядка атомного, масштабах. Но в дальнейшем оказалось, что квантовая теория необходима и при описании свойств макротел. Только квантовая теория твердого тела смогла объяснить различие свойств металлов, диэлектриков и полупроводников, температурную зависимость проводимости, теплоёмкости и других макроскопических свойств. Однако непосредственно квантование, дискретность значений физических величин долгое время не наблюдалось при изучении макроскопических явлений. Это связано с тем, что при изучении макроскопических тел мы имеем дело с огромным числом частиц. И хотя поведение каждой отдельно взятой частицы описывается квантовыми закономерностями, в целом квантование энергии, импульса и других величин в макроскопических телах не проявляется. В основном это связано с влиянием теплового, хаотического движения микрочастиц. Тепловое движение приводит к «размазыванию», маскировке квантовых закономерностей.

Во второй половине 20 века было установлено важное обобщение положений квантовой физики. Был обнаружен целый ряд эффектов, которые показали, что квантование возможно и в макроскопическом масштабе. В связи с этим, например, оказалось возможным определение основной атомной постоянной - постоянной Планка - из макроскопических экспериментов. Наблюдение макроскопического квантования возможно, когда вещество находится в необычных условиях. Оно наблюдается при низких температурах, когда, по словам одного из основоположников физики низких температур Г. Камерлинг-Оннеса, приподнимается «завеса, которой тепловое движение при обычных температурах закрывает от нас внутренний мир атомов и электронов», при сверхвысоких плотностях вещества в звездах, и т.д. Низкие температуры и сверхвысокие плотности позволяют наблюдать квантование в макроскопических масштабах. Оно перестает быть характерным только для микромира, и поэтому изучение макроскопических квантовых явлений играет принципиально важную роль. Одним из таких явлений является квантование магнитного потока, наблюдаемое при низких температурах.

**Сверхпроводимость. Незатухающие токи и квантование магнитного потока в сверхпроводниках.** В 1911 г. в лаборатории голландского физика Г. Камерлинг-Оннеса было обнаружено, что при температуре, равной  $4,2\text{ K}$ , электрическое сопротивление ртути скачком обращается в нуль. Обнаруженное явление назвали сверхпроводимостью. Оно состоит в том, что у ряда веществ при определенной для каждого вещества так называемой критической температуре  $T_c$  исчезает электрическое сопротивление. Сопротивление остается равным нулю вплоть до  $T = 0\text{ K}$ . Явление сверхпроводимости оставалось загадочным вплоть до 1957 г.

Механизм сверхпроводимости при температурах близких к абсолютному нулю нашел объяснение в теории БКШ, авторами которой являются Д. Бардин, Л. Купер и Д. Шриффер.

Явление сверхпроводимости в твердых телах подобно явлению сверхтекучести в жидкостях. Сверхтекучесть - это свойство бозонов, т.е. частиц с целочисленным спином. Однако электроны имеют полуцелый спин и, следовательно, относятся к классу фермионов, для которых движение без сопротивления невозможно. Объяснить движения электронов без сопротивления удалось, предположив объединение электронов проводимости металлов в пары. Такая пара, получившая название «куперовская», имеет целочисленный спин. Согласно теории БКШ при  $T \rightarrow 0\text{ K}$ , электроны в пространстве импульсов заполняют объем, ограниченный поверхностью Ферми. Электроны, находящиеся вблизи поверхности Ферми и имеющие противоположно направленные спины, объединяются в пары, благодаря взаимодействию с решеткой. Это взаимодействие возникает вследствие обмена фононами и имеет характер притяжения. Спин пары равен нулю, то есть пара является бозоном. Малая величина энергии связи в куперовской паре объясняет низкотемпературную сверхпроводимость при  $T \leq 20\text{ K}$  [9]. Явление сверхпроводимости при криогенных (низких)

температурах распространено достаточно широко. Сверхпроводимостью обладают 26 металлов. Большинство из них являются сверхпроводниками I рода, с критическими температурами перехода ниже  $4,2\text{K}$ . Еще 13 элементов проявляют сверхпроводящие свойства при высоких давлениях. Среди них такие полупроводники, как кремний, германий, селен, теллур, сурьма и др. Следует заметить, что сверхпроводимостью не обладают металлы, являющиеся наилучшими проводниками в нормальных условиях. К ним относятся золото Au, медь Cu, серебро Ag. Малое сопротивление этих материалов указывает на слабое взаимодействие электронов с решеткой. Такое слабое взаимодействие не создает вблизи абсолютного нуля достаточного межэлектронного притяжения, способного преодолеть кулоновское отталкивание и создать куперовскую пару. Поэтому не происходит их переход в сверхпроводящее состояние. Кроме чистых металлов сверхпроводимостью обладают многие интерметаллические соединения и сплавы. Общее количество наименований известных в настоящее время сверхпроводников составляет около 2000.

С помощью сверхпроводников оказывается возможным наблюдение так называемых незатухающих токов. Если в металлическом кольце (в соответствии с рисунком 7.1) возбудить электрический ток, то при обычной комнатной температуре он будет быстро затухать, вследствие тепловых потерь (закон Джоуля-Ленца).

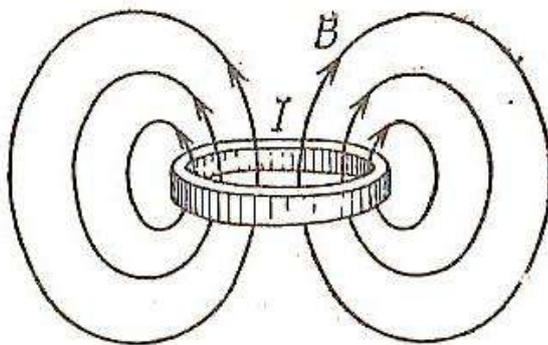


Рисунок 7.1 Магнитное поле в кольце сверхпроводника

При температурах, близких к абсолютному нулю, в сверхпроводящем состоянии однажды наведенный ток становится незатухающим. В одном из поставленных опытов ток циркулировал в кольце, находящемся в сверхпроводящем состоянии, в течение двух с половиной лет, и если бы эксперимент не прекратили, мог бы циркулировать сколь угодно долго.

В обычных проводниках затухание тока происходит за счет потери энергии, за счет превращения электрической энергии в другие виды. В частности, такими потерями являются потери на джоулево тепло. В сверхпроводниках ток течет без сопротивления и, следовательно, не должен сопровождаться такими потерями. Однако есть и другой механизм потери энергии движущимися электронами, предсказанный в классической электродинамике Максвелла. Движение электронов, образующих ток в кольце, не является равномерным и прямолинейным. Электроны движутся по окружности, а потому испытывают ускорение. Но ускоренное движение электрического заряда в соответствии с теорией Максвелла всегда сопровождается излучением электромагнитных волн. Следовательно, должны излучать электромагнитные волны и электроны, движущиеся с центростремительным ускорением в рассматриваемом металлическом кольце. Постепенный расход энергии на излучение должен привести, даже в отсутствие тепловых потерь, к затуханию тока в сверхпроводящем кольце. Но результаты экспериментов противоречат этому: ток не затухает, потерь энергии электрического тока не наблюдается. Объяснение этому явлению можно получить на основе квантовой теории. Для этого подробнее рассмотрим возникновение квантовой теории в связи с исследованием структуры атома.

Наблюдаемое явление незатухающего тока обусловлено квантовыми закономерностями. В истории физики известна ситуация, при которой электрон, имеющий центростремительное ускорение, не излучает. Это электрон в атоме в модели Резерфорда и полуклассической (или квазиклассической) теории Бора. Планетарная модель атома Резерфорда явилась результатом его классических опытов по рассеянию  $\alpha$  - частиц. Целью опытов было исследование распределения положительного заряда внутри атома. Анализируя характер рассеяния  $\alpha$  - частиц вследствие взаимодействия с положительным зарядом атома, Резерфорд пришел к выводу, что этот заряд

сосредоточен в очень малой области, названной ядром. А электроны вращаются вокруг этого ядра. При вращательном движении частица обладает центростремительным ускорением. Заряженная частица, движущаяся с ускорением, по теории Максвелла, излучая электромагнитные волны, теряет энергию. Это должно привести к падению электрона на ядро. Иными словами, из основных положений классической теории электромагнитных явлений следует вывод о неустойчивости планетарной модели атома. Но в действительности атомы устойчивы, а из опытов по рассеянию  $\alpha$ -частиц следует справедливость модели атома Резерфорда.

Исследование этой фундаментальной трудности, стоявшей на пути признания планетарной модели атома, привело к созданию квантовой теории Бора, которая является полуклассической. Согласно постулатам Бора электрон в атоме может двигаться только по таким орбитам, на которых его момент импульса кратен постоянной Планка,  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ , то есть  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = n \cdot \hbar$  - для круговых орбит, где  $n$  – целое число ( $n=1,2,3,\dots$ ).

На каждой из орбит электрон обладает вполне определенной энергией, при этом он не излучает электромагнитные волны. В теории Бора момент импульса и энергия электрона в атоме могут принимать лишь дискретный ряд значений, то есть имеют дискретный спектр.

Таким образом, введение квантовых представлений позволяет сохранить планетарную модель атома. При этом важно для дальнейшего рассмотрения то, что условие (1) имеет ясный физический смысл. В 1924 г. появилось представление о волнах де Бройля, длина волны де Бройля равна

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

В стационарном состоянии атома на длине круговой электронной орбиты должно укладываться целое число волн де Бройля  $n\lambda = 2\pi r$ . Наглядно такую волну можно представить себе, как свернутую пружину (в соответствии с рисунком 7.2). Из рисунка видно, что у такой пружины должно быть целое число витков.

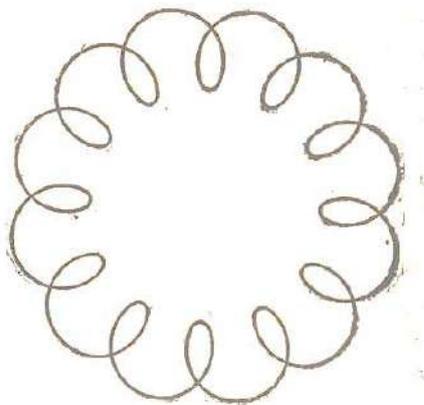


Рисунок 7.2 Представление волны де Бройля на круговой орбите

Это соответствует условию квантования момента импульса (1). Более общим квазиклассическим условием квантования, применимым не только к круговым, но и к эллиптическим орбитам, к движению по любой замкнутой траектории (замкнутому контуру), является формула

$$\oint_C \vec{p} d\vec{r} = \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{h}{2\pi},$$

где  $C$  - замкнутый контур.

Электрический ток в сверхпроводящем кольце подобен движению электрона по замкнутой траектории. Излучение электромагнитных волн при этом в сверхпроводящем кольце не возникает, точно так же, как не наблюдается излучения электрона, движущегося вокруг атомного ядра. Однако между этими двумя явлениями есть существенная разница: атом относится к микрообъектам, для которых и разрабатывалась квантовая теория, а ток в сверхпроводящем кольце – система

макроскопическая. В сверхпроводнике можно рассматривать макроскопический электронный «коллектив», состоящий из огромного числа микрочастиц. Движение электронной системы в сверхпроводниках оказывается строго согласованным, когерентным. Если предположить, что замкнутый сверхпроводящий контур для такого коллектива представляет собой гигантскую «боровскую» орбиту, то в нем должны наблюдаться квантовые эффекты. При этом квантоваться, то есть иметь дискретный ряд значений (спектр), будет непосредственно наблюдаемая макроскопическая величина – сила тока.

Таким образом, на основе квантовых представлений оказывается, что сила тока в сверхпроводящем кольце не может принимать любое численное значение и изменяться непрерывно. Аналогично тому, как в планетарной модели атома, разрешенные орбиты электрона характеризуются определенными значениями момента импульса и энергии, гигантская орбита электронов в сверхпроводящем кольце характеризуется вполне определенным значением силы тока. В данном случае радиус орбиты не меняется и равен радиусу кольца, но квантование импульса приводит к квантованию силы тока (плотность тока  $j$  пропорциональна скорости электронов  $v, p = m v$ ).

Поскольку сверхпроводящий ток тесно связан с магнитным полем, квантование тока приводит к тому, что и напряженность магнитного поля  $H$  (индукция магнитного поля  $B$ ) может принимать только дискретный ряд значений. Следовательно, будет квантоваться и магнитный поток  $\Phi = \pi r^2 H$  (или  $\Phi = \pi r^2 B$ ) через сечение кольца  $S = \pi r^2$ , находящегося в сверхпроводящем состоянии. Магнитный поток  $\Phi$  может быть кратен некоторой минимальной порции - кванту магнитного потока  $\Phi_0$ , т. е.  $\Phi = N \Phi_0$ , где  $N$  - целое число. Магнитный поток - макроскопическая величина, и возможность его квантования означает переход к гигантским, по сравнению с атомными, масштабам квантования. В экспериментах непосредственно наблюдается квантование магнитного потока и измеряется величина элементарного кванта потока  $\Phi_0$ .

## 7.2 Квант магнитного потока

Для вычисления значения кванта магнитного потока, используют аналогию с планетарной моделью атома и применяют представления квазиклассической теории Бора к электрическому току, циркулирующему в кольце.

Электроны, движущиеся в кольце, подобны атомным электронам, находящимся на боровской орбите. Запишем условие квантования момента импульса этих электронов:

$$p \cdot r = N \cdot h \cdot N = 1, 2, 3 \dots$$

В данном случае  $r$  - радиус кольца, в котором, циркулирует сверхпроводящий ток. Радиус атомной боровской орбиты составляет, как известно, величину  $r_B = 10^{-8}$  см. Радиус кольца, используемого в экспериментах по обнаружению квантования магнитного потока  $\sim 10^3$  см. Пространственный масштаб квантования возрастает, таким образом, в  $10^5$  раз.

Поскольку радиус кольца - величина определенная, то можно рассматривать, как условие квантования электронного импульса  $p = m \cdot v$ . Квантование импульса означает, что импульс, а вместе с тем и ток в кольце может принимать лишь дискретный ряд значений, что приводит к квантованию магнитного потока  $\Phi$ .

Можно показать, что импульс и магнитный поток связаны между собой соотношением:

$$p = \frac{\Phi e}{2\pi r}$$

Учитывая, что в сверхпроводнике электроны связаны в пары, имеет смысл говорить об импульсе электронной пары как целого, который равен удвоенному импульсу электрона:

$$p = \frac{\Phi e}{\pi r}$$

Эта формула связывает электронный импульс в сверхпроводнике с магнитным потоком, создаваемым сверхпроводящим током. Подставив это выражение в боровский закон квантования, получим

$$\Phi = N \frac{h}{2e} = N\Phi_0,$$

где  $\Phi_0 = h/2e$

Можно показать, что полученная величина имеет размерность магнитного потока (Вебер).

Таким образом, квант магнитного потока оказывается равным  $h/2e$ , то есть его величина однозначно определяется фундаментальными постоянными. Магнитный поток, пронизывающий кольцо, находящееся в сверхпроводящем состоянии, может принимать только значения, кратные  $\Phi_0$ . Величину кванта магнитного потока легко сосчитать, подставив в  $\Phi_0 = h/2e$  численные значения постоянной Планка  $h$  и заряда электрона  $e$ .

**Обоснование связи импульса и магнитного потока.** Вывод основан на существовании связи между электронным импульсом и квантом потока  $\Phi$ .

Энергия, которой обладает ток  $I$ , текущий по контуру с индуктивностью  $L$ , равна

$$E = \frac{LI^2}{2} - \text{энергия проводника с током в нормальном состоянии.}$$

Рассмотрим случай, когда по контуру, находящемуся в сверхпроводящем состоянии, протекает ток  $I$ . Магнитный поток  $\Phi$ , создаваемый этим током, возрастает при увеличении тока по закону  $\Phi = LI$ , где  $L$  – индуктивность контура. Предположим, что в начальный момент времени  $t_0 = 0$  ток в контуре равен  $I_0$ . Начиная с этого момента времени, сила тока равномерно возрастает и к моменту времени  $t$  оказывается равной  $I_t$ . Ясно, что возрастание силы тока сопровождается ростом энергии магнитного поля, создаваемого током.

За время  $t$  по проводнику переместился заряд  $q$ . Заряд двигался ускоренно, так как сила тока возрастала (плотность тока равна  $j = nev$ ; при постоянном  $n$  возрастание  $j$  обусловлено ростом  $v$ ). Для того чтобы получить формулу энергии тока, вычислим работу электрических сил по перемещению заряда  $q$  вдоль всей замкнутой цепи. Работа выражается формулой  $A = q\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – электродвижущая сила, равная в обычном проводнике

$$\varepsilon = IR + \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Первое слагаемое во второй части этого равенства связано с обычными омическими потерями, а второе обусловлено наличием эффекта самоиндукции, ослабляющего ток. Ясно, что  $q = I_{cp}t$ , где  $I_{cp}$  – средняя сила тока, равная при равномерном возрастании  $I = (I_0 + I_t)/2$ . Таким образом, работа оказывается равной

$$A = \frac{I_0 + I_t}{2} t \varepsilon$$

В сверхпроводниках сопротивление  $R=0$  и поэтому

$$\varepsilon = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

Поскольку  $\Phi = LI$ ,

то

$$\varepsilon = \frac{L\Delta I}{\Delta t}$$

В нашем случае изменение силы тока  $\Delta I$  равно  $\Delta I = I_t - I_0$ , а промежуток времени  $\Delta t = t$ .

Тогда

$$\varepsilon = \frac{L(I_t - I_0)}{t}.$$

Подставляя это значение

$$A = \frac{I_0 + I_t}{2} \cdot L \frac{I_t - I_0}{t}$$

Работа, таким образом, оказывается равной

$$A = \frac{LI_t^2}{2} - \frac{LI_0^2}{2}$$

Видно, что величина работы описывается изменением величины  $LI^2/2$ . Её естественно считать равной энергии тока, так что

$$E = \frac{LI^2}{2} - \text{энергия проводника в сверхпроводящем состоянии.}$$

То есть формула энергии для проводника одинакова как для нормального, так и для сверхпроводящего состояния.

Поскольку магнитный поток равен  $\Phi = LI$ , энергию можно записать как

$$E = \frac{I\Phi}{2}$$

Предположим, что ток в кольце создается  $N$  электронами, движущимися со скоростью  $v$ . Тогда отношение  $Ne/2\pi r$  представляет собой линейную плотность заряда, и сила тока, оказывается равной

$$I' = \frac{Nev}{2\pi r}$$

Подставим это выражение в формулу для энергии

$$E = \frac{Nev}{2} \frac{\Phi}{2\pi r}$$

Энергия частицы, движущейся со скоростью  $v$  равна

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{pv}{2}$$

где  $p$  - импульс частицы.

Следовательно, энергия  $N$  электронов, движущихся со скоростью  $v$  по сверхпроводящему кольцу, равна

$$E = \frac{Npv}{2},$$
$$E = \frac{Npv}{2} = \frac{Nev}{2} \frac{\Phi}{2\pi r} = E$$

Отсюда найдем импульс

$$p = \frac{\Phi e}{2\pi r}$$

Проверив единицы измерения полученного выражения, можно показать, что оно соответствует единице измерения (размерности) импульса.

**Экспериментальное обнаружение квантования магнитного потока.** Квантование магнитного потока, величина его кванта, имеют большое значение в современной физике. Экспериментально квантование было впервые обнаружено Дивером и Фейрбэнком, независимо от них, Доллом и Нейбауэром в 1961 г. Исследования проводились различными методами. В

эксперименте Дивера и Фейрбэнка на медную проволоку диаметром  $\sim 1,3 \cdot 10^{-3}$  см наносился по всей поверхности тонкий слой олова, получался «полый» цилиндр из олова. При  $T < 3,8$  К олово переходит в сверхпроводящее состояние. В цилиндре при температурах ниже  $T_c = 3,8$  К возбуждался сверхпроводящий ток в тонком слое олова. Медь не является сверхпроводником, и поэтому она играла роль остова, необходимого для приготовления сверхпроводящего цилиндра. Для измерения магнитного поля у концов цилиндра помещались две индукционные катушки. Цилиндр приводился в колебательное движение вдоль его оси с частотой  $100$  Гц и амплитудой в  $1$  мм. Индукционный ток, наводимый в катушках, позволял судить о величине магнитного потока, находящегося внутри цилиндра. Результаты измерений приведены в соответствии с рисунком 7.3.

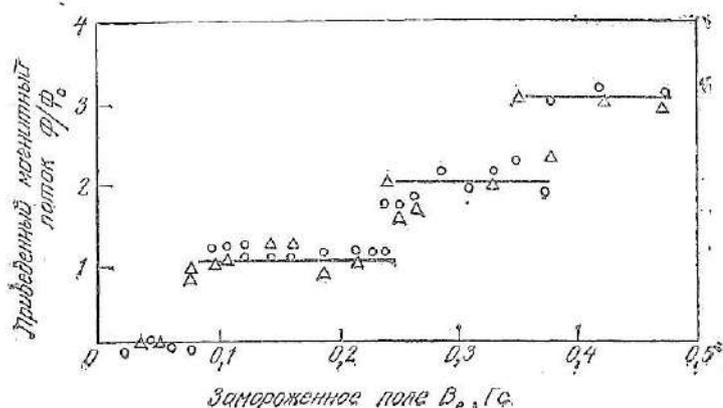


Рисунок 7.3 Зависимость величины магнитного потока от индукционного тока, наводимого в катушках

На котором видно, что магнитный поток принимает дискретный ряд значений, кратных элементарному кванту потока  $\Phi_0$ .

В работе Р. Долла и М. Нейбауэра использовался другой метод. Схема установки показана в соответствии с рисунком 8.4.

В свинцовом цилиндре диаметром  $d = 10^{-3}$  см и длиной  $l = 0,6$  мм циркулировал ток. Образец подвешивался на кварцевой нити. Включалось вспомогательное поле, перпендикулярное оси цилиндра. Взаимодействие этого поля с магнитным моментом образца приводило к появлению вращающего момента и к колебаниям цилиндра. Определяя этот момент и вычисляя далее магнитный момент цилиндра, можно определить и магнитный поток. Оказалось, что эта величина действительно квантуется и принимает значения

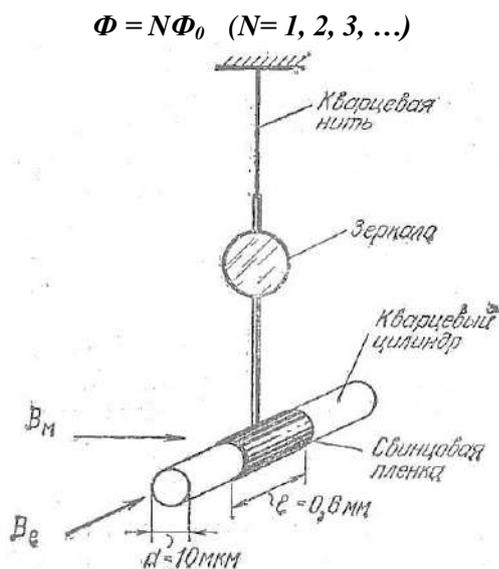


Рисунок 7.4 Схема установки Р. Долла и М. Нейбауэра

*Примечание:* Эффект квантования магнитного потока был предсказан Ф. Лондоном до

создания современной теории сверхпроводимости. Поскольку  $\Phi$ . Лондон не знал о существовании связанных электронных пар, поэтому при вычислении магнитного потока он получил значение вдвое большее чем современное значение  $\Phi_0$ , при вычислении которого используется удвоенный заряд. Эксперименты, позволившие подтвердить квантование магнитного потока, являются подтверждением гипотезы  $\Phi$ . Лондона и одновременно подтверждают обоснование правильности одного из основных положений теории сверхпроводимости о существовании связанных электронных пар.

### 7.3 Классический эффект Холла

Эффект Холла (гальваномагнитное явление) – это явление, состоящее в том, что если проводник с током (направление оси  $x$ ) поместить в магнитное поле (ось  $z$ ), перпендикулярное направлению тока, то между гранями проводника (ось  $y$ ), перпендикулярными направлению магнитного поля и тока возникает разность потенциалов (в соответствии с рисунком 7.5). Это означает, что между этими гранями возникает электрическое поле в направлении, перпендикулярном направлениям тока и магнитного поля.

Возникающее электрическое поле называется полем Холла. Величина возникающей разности потенциалов определяется формулой:

$$U = RdjB$$

где  $j$  – плотность тока,

$B$  – индукция магнитного поля;

$D$  – расстояние между гранями проводника, перпендикулярными току и магнитному полю;

$R$  – коэффициент пропорциональности, получивший название постоянной Холла.

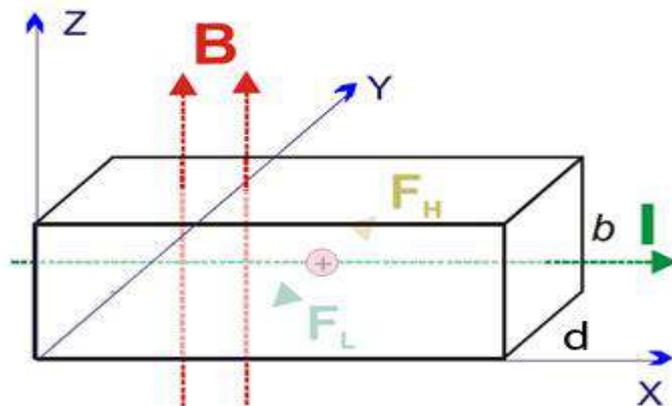


Рисунок 7.5 Схема классического эффекта Холла

Открытие Холла оказало значительное влияние на дальнейшее развитие не только классической, но и современной квантовой физики находит широкое научное и практическое применение.



**Эдвин Герберт Холл**, американский физик. Родился в г.Грейт-Фолз (ныне Горем), штат Мэн. Поступил в первый набор на физический факультет только что открытого Университета Джонса Гопкинса в Балтиморе первого американского научно-исследовательского и учебно-образовательного учреждения, смоделированного по образцу немецких научно-исследовательских заведений. Эффект, названный впоследствии его именем, Холл открыл в 1879 году при подготовке докторской диссертации по электричеству и магнетизму. Защитив ее, ученый перешел в Гарвардский университет, где затем прославился инновациями в области преподавания физики в высшей и особенно средней школе.

Э. Холл измерил величину поперечного электрического напряжения, возникающего под воздействием внешнего магнитного

поля, и понял, что направление вектора напряженности электрического поля зависит от знака заряда, создающего ток. В результате проведенных опытов, Э. Холл первым в мире наглядно продемонстрировал, что электрический ток в металлах создается направленным движением отрицательных зарядов. Из истории физики известно, что ученые долгое время сомневались в природе носителей тока и в том, воздействует ли магнитное поле на эти носители или на саму неподвижную структуру проводника. Выводы Э. Холла о знаке заряда носителей тока подтвердились в дальнейших опытах, в том числе в опытах Р. Толмена и Т. Стюарта в 1916 году.

Обнаруженное Э. Холлом явление, называется классическим эффектом. В 1980 году германский физик Клаус фон Клитцинг (Klaus von Klitzing, р.1943) открыл квантово-механический аналог эффекта Холла, за что был в 1985 году удостоен Нобелевской премии по физике. Между открытиями классического и квантового эффекта Холла прошло более ста лет [10].

Вернемся к рисунку 7.6 и рассмотрим более подробно механизм возникновения классического эффекта Холла.

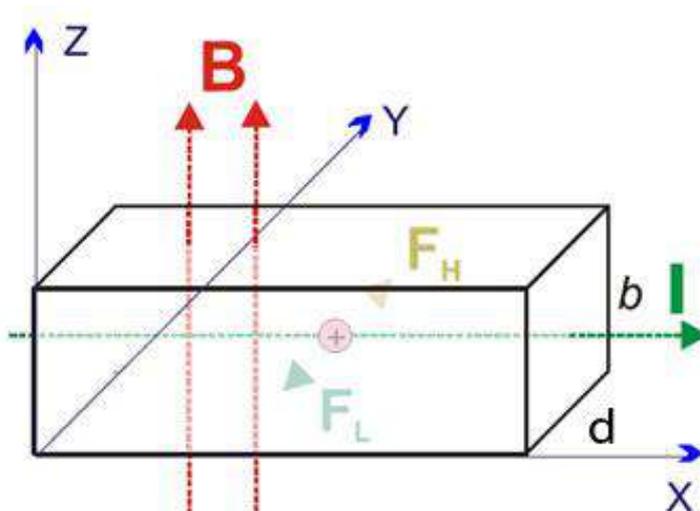


Рисунок 8.6 Схема классического эффекта Холла

Учтем, что в настоящее время установлено, что носителями тока в металлах являются свободные электроны, а в полупроводниках – электроны и дырки. Используем обычный проводник (или полупроводник), имеющий форму прямоугольного параллелепипеда. Через него течет ток  $I$  в направлении оси  $x$ . Следовательно, средняя скорость электронов в этом направлении равна

$$v = \frac{I}{neS},$$

где  $n$  - концентрация,  $S$  - площадь поперечного сечения проводника. На электроны, движущиеся в магнитном поле, действует сила Лоренца

$$\vec{F}_L = e[\vec{v}\vec{B}]$$

По условию эксперимента  $\vec{B} \perp \vec{v}$ , следовательно по модулю

$$F_L = evB = \frac{BI}{nS}$$

Направление силы перпендикулярно к скорости. Поэтому если носители тока – электроны (металл или полупроводник  $n$ -типа), то на передней грани проводника будут накапливаться отрицательные заряды, а на противоположной ей, вследствие недостатка электронов – положительные заряды. Возникает электрическое поле, поле Холла напряженностью  $E_H$ , которое действует на носители тока с силой Кулона.

$$\vec{F}_K = e\vec{E}$$

Эта сила противодействует силе Лоренца, препятствуя смещению зарядов. Накопление зарядов на противоположных гранях проводника будет происходить до тех пор пока силы Лоренца и Кулона

не скомпенсируют друг друга  $\vec{F}_K = -\vec{F}_L$ , то есть по модулю

$$eE = \frac{BI}{nS}.$$

Отсюда

$$E = \frac{BI}{enS}.$$

Существование электрического поля вдоль оси  $y$  означает, что между соответствующими гранями проводника возникает разность потенциалов  $U = Ed$ . Подставляя

значение  $E$ , получим

$$U = \frac{BI d}{neS}.$$

Учтем, что площадь поперечного сечения рассматриваемого проводника

$$S=bd.$$

Тогда

$$U = \frac{1}{ne} \frac{BI}{b},$$

или

$$U = R \frac{BI}{b},$$

или

$$U = R d j B$$

Постоянную величину  $R = \frac{1}{ne}$  называют постоянной Холла.

Из полученной формулы для разности потенциалов видно, что она зависит от силы тока, индукции магнитного поля, характерных размеров проводника и концентрации носителей заряда. Направление электрического поля и знак разности потенциалов зависит от знака заряда носителей тока.

Если ток создается носителями разных знаков (положительные и отрицательные ионы в газе, электроны и дырки в полупроводниках), то эффект Холла усложняется. В идеальном случае, если носители отличаются только знаком при равных подвижности и концентрации, то эффект Холла должен обратиться в нуль. Это связано с тем, что участвующие в создании тока заряды противоположных знаков движутся в противоположных направлениях. При этом смещение зарядов обоих знаков под действием магнитной силы Лоренца происходит в одну сторону, и поперечное электрическое поле не возникает. Обычно концентрации и подвижности зарядов разных знаков не равны, поэтому создаваемые ими поперечные поля компенсируются только частично.

Формула классического эффекта Холла хорошо выполняется в обычных трехмерных металлах при комнатной температуре. Однако в более точных исследованиях следует учитывать, что постоянная Холла точнее записывается

как  $R = \frac{r}{en}$ , где  $r$  - величина, близкая к единице, зависящая от направления

$\vec{B}$  относительно кристаллографических осей. В области сильных магнитных полей  $r = 1$ . В полупроводниках постоянная Холла определяется следующей формулой:

$$R = \frac{1}{e} \cdot \frac{\sigma_p^2 n_p - \sigma_n^2 n_n}{(\sigma_p + \sigma_n)^2}$$

$$R = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{n_p - n_d}$$

Критерий сильного поля:  $\omega_c \tau > 1$ ,  $\omega_c$  - циклотронная частота носителя.  
 При  $n_d = n$ , для всех значений индукции магнитного поля

$$R = \frac{1}{en} \cdot \frac{\sigma_p - \sigma_d}{\sigma_p + \sigma_d}$$

а знак  $R$  зависит от зонной структуры. В ферромагнитных электронах подвергаются совместному действию внешнего магнитного поля и магнитного поля демонов.

#### 7.4 Применение классического эффекта Холла

Эффект Холла – один из наиболее эффективных методов изучения энергетических спектров носителей заряда в металлах и полупроводниках, которые имеют важное теоретическое и практическое значение. Эффект Холла можно использовать для определения количества примесей в полупроводниках и умножения постоянных токов в аналоговых вычислительных машинах, измерения индукции магнитного поля. Эффект Холла применяется для определения природы частиц, носителей тока, их концентрации. Следует отметить, что у некоторых металлов знак поперечной разности потенциалов в эффекте Холла соответствует положительным носителям тока. Это объясняется особым перекрыванием зон, при котором часть электронов переходит с верхних уровней валентной зоны на нижние уровни вышерасположенной зоны. В результате возникают в равном количестве свободные электроны и дырки. Проводимость такого металла смешанная, электронно-дырочная, но подвижность дырок больше, чем электронов. Отсюда аномальный для металла знак эффекта Холла.

Первые предложения по техническому использованию эффекта Холла были высказаны на рубеже XIX и XX вв. Реальная база для этого возникла, однако, значительно позднее, а именно со времени разработки технологии получения полупроводниковых материалов, характеризующихся значительными подвижностями носителей тока. К этим материалам относятся: германий Ge, кремний Si, антимонид и арсенид индия InSb и InAs, арсенид - фосфид индия InAsP, арсенид галлия GaAs, селенид и теллурид ртути HgSe и HgTe. За последние годы в технологических лабораториях разработано несколько новых материалов, например, кадмий-ртуть-теллур CdHgTe, арсенид кадмия  $Cd_3As_2$ , которые также могут быть пригодны для технических применений эффекта Холла.

Одновременно с развитием технологии полупроводниковых материалов, в которых эффект Холла проявляется в сильной степени, отмечается прогресс и в области полупроводниковых приборов, работа которых основана на этом эффекте. Для электродного элемента, в основе работы которого лежит эффект Холла и который представляет собой полупроводниковую пластину с выводами и защитной оболочкой, который принято называть *датчиком Холла*. Датчики Холла нашли большое практическое значение.

Требования, предъявляемые к датчикам Холла, разнообразны и зависят от их назначения. До настоящего времени нет такого материала, который обладал бы всеми требуемыми параметрами. Поэтому из множества полупроводниковых материалов, в которых наблюдается эффект Холла, для датчиков Холла выбирается тот или иной материал в зависимости от конкретной цели применения датчика. Обычно для элементов Холла используются материалы  $n$  - типа, т.е. с электронной проводимостью, так как подвижность носителей тока в них в несколько раз (от двух до нескольких десятков) больше, чем в материалах  $p$ -типа. Основными параметрами полупроводниковых материалов, используемых для изготовления датчиков Холла, считаются: удельное сопротивление (иногда удобно употреблять удельную электрическую проводимость  $\sigma = 1/\rho$ ), коэффициент Холла и подвижность. Все эти параметры являются зависимыми от концентрации носителей тока, температуры и магнитной индукции; может также проявляться анизотропия этих зависимостей.

Кроме того, существует целый ряд эффектов, сопровождающих явления Холла таких как термо - э.д.с, гальвано- и термомагнитные эффекты.

Идеальный датчик Холла должен обладать следующими свойствами:

- большой чувствительностью;
- большим выходным напряжением;
- большим к.п.д. и большой мощностью, снимаемой с электродов Холла;
- независимостью параметров от температуры;
- линейностью относительно  $I_x$ ,  $V_z$  и  $R$  (активное сопротивление нагрузки).

Из свойств полупроводниковых материалов, следует, что перечисленные требования являются, в общем, противоречивыми и все одновременно не могут быть выполнены. По этой причине проектирование датчиков Холла необходимо проводить с учетом их конкретного назначения, не обращая особого внимания на менее существенные параметры и стараясь получить соответствующие значения заданных параметров.

В ряде конкретных применений появляются дополнительные требования, такие как:

- малая толщина датчика Холла - в случае работы в узких зазорах;
- малые размеры активной поверхности - в случае исследования распределения неоднородности магнитного поля.

Датчики Холла являются основой многих типов датчиков, таких как датчики линейного или углового перемещения, датчики магнитного поля, датчики тока, датчики расхода и др. Удобство бесконтактного срабатывания (полное отсутствие механического износа), низкая стоимость, простота использования делают их незаменимыми в приборостроении, автомобильной, авиационной и других отраслях промышленности. Интегральные датчики Холла производят такие фирмы, как Honeywell, Melexis, Allegro Microsystems, MicronasIntermetall, Siemens, AnalogDevices и др.

Некоторые наиболее популярные применения интегральных датчиков Холла показаны на схеме в соответствии с рисунком 7.7.

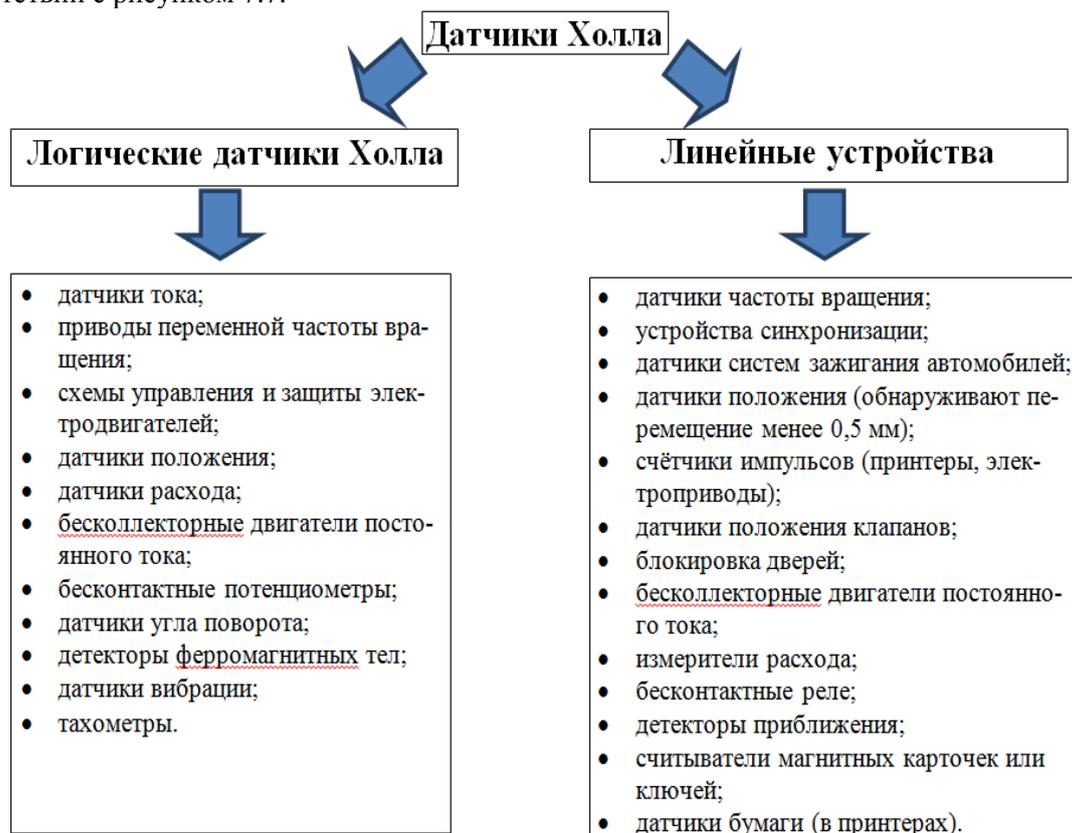


Рисунок 7.7 Применение датчиков Холла

**Первая группа** интегральных датчиков Холла - это линейные устройства, применяющиеся в измерителях напряжённости магнитного поля. Как правило, эти устройства содержат схемы усиления сигнала датчика. Необходимая предварительная обработка сигнала обычно заключается в усилении и температурной компенсации. Может понадобиться также стабилизация питающего напряжения. При отсутствии магнитного поля выходное напряжение датчика должно быть равно нулю, поэтому требуется дифференциальный усилитель, схема которого показана в соответствии с рисунком 7.8.

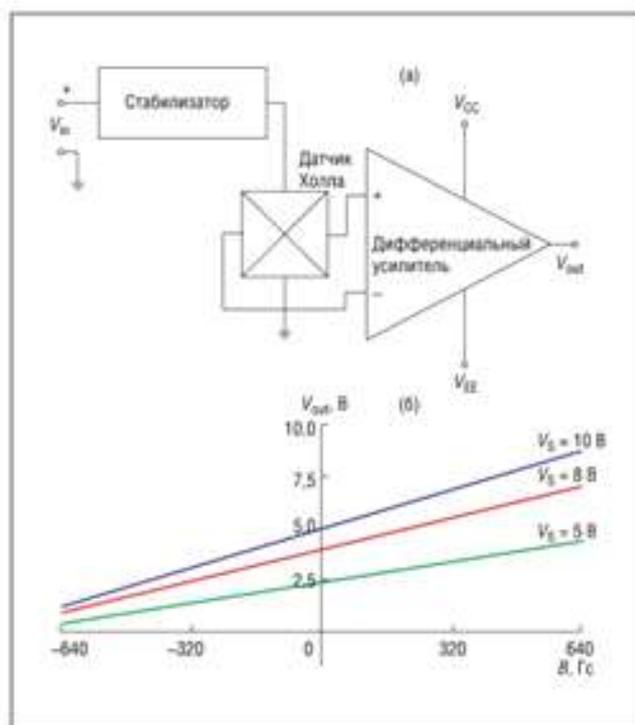


Рисунок 7.8 Внутренняя схема ИМС линейного датчика Холла (а) и график его характеристики преобразования (б)

**Вторая группа** включает в себя микросхемы компараторного типа с логическими уровнями напряжения на выходе, схема которых показана в соответствии с рисунком 7.9.

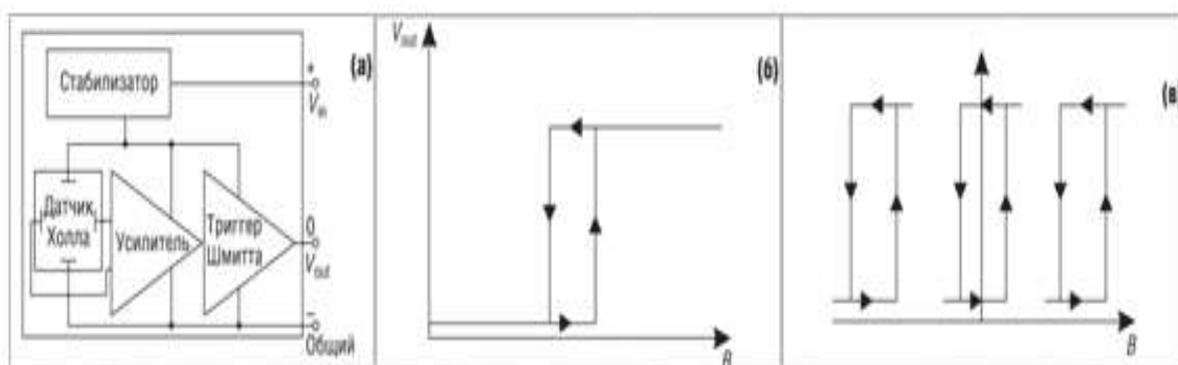


Рисунок 7.9 Логический датчик Холла

Эта группа более многочисленна в силу большего числа возможных применений. Микросхемы с логическим выходом (рисунок 28а) делятся на две подгруппы: переключатели и триггеры. Униполярный переключатель срабатывает только при наличии магнитного поля одной полярности и гарантирует выключенное состояние в отсутствие магнитного поля; магнитное поле противоположной полярности не оказывает на него никакого влияния (рисунок 28б). Биполярный триггер, напротив, реагирует на обе полярности: включается при приближении северного или южного полюсов магнита и выключается только в том случае, если поле с противоположным знаком достигнет определенного уровня. Термин «биполярный переключатель» обычно применяется к триггерам, реагирующим на пропадание поля. Такие переключатели переходят во включенное состояние при наличии магнитного поля, а выключаются при снижении уровня той же полярности, отсутствии поля, или в присутствии поля с противоположным знаком (рисунок 28в). Наличие ступени гистерезиса, которая является разностью между величинами магнитного поля в точках включения и выключения, повышает помехозащищенность устройства.

Рассмотрим более подробно конструкцию некоторых датчиков Холла: датчиков тока и датчиков расхода:

**Датчик Тока.** Линейные датчики Холла могут быть использованы в составе измерителей силы тока в пределах от 250 мА до тысяч ампер. Важнейшим достоинством таких датчиков является полное отсутствие электрической связи с измеряемой цепью. Линейные датчики позволяют измерять постоянные и переменные токи, в том числе токи довольно высокой частоты. Если линейный датчик Холла расположен вблизи проводника с током, то выходное напряжение датчика пропорционально индукции магнитного поля, окружающего проводник. Величина индукции, в свою очередь, пропорциональна току. В простейшем случае датчик тока представляет собой конструкцию (в соответствии с рисунком 7.10), в которой датчик Холла устанавливается около провода, по которому течёт измеряемый ток (рисунок 7.10а).

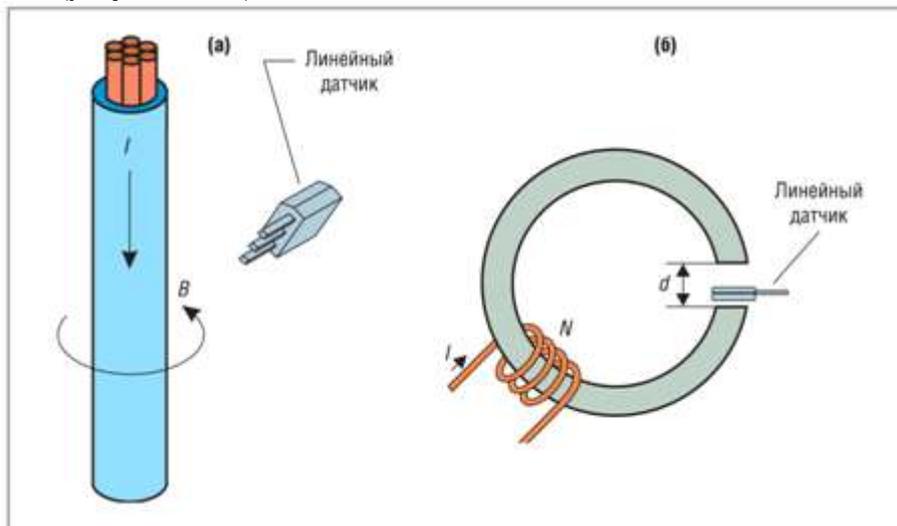


Рисунок 7.10 Конструкции датчиков тока

Такие датчики используются для измерения больших токов, особенно в линиях электропередач. Индукция  $B$  определяется по формуле:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad \text{или} \quad B = 2 \cdot 10^{-7} \frac{I}{r},$$

так как  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}},$

где  $r$  - расстояние от центра чувствительной области датчика до оси симметрии проводника в метрах. Чувствительность датчика тока может быть значительно увеличена путём использования концентратора магнитного потока в виде магнитопровода с прорезью, в которую помещается линейный датчик Холла (рисунок 8.10б). В этом случае индукция магнитного потока через датчик равна

$$B = 12,57 \cdot 10^{-7} \frac{IN}{d}.$$

**Датчик расхода.** Существуют различные методы измерения расхода с использованием цифровых датчиков Холла, но принцип у них, как правило, общий: каждое изменение магнитного потока через датчик соответствует некоторой порции жидкости или газа, прошедшей через трубопровод. В примере, в соответствии с рисунком 7.11, магнитное поле создаётся постоянными магнитами, установленными на лопастях рабочего колеса. Рабочее колесо вращается потоком воды. Датчик выдаёт два импульса за оборот колеса.

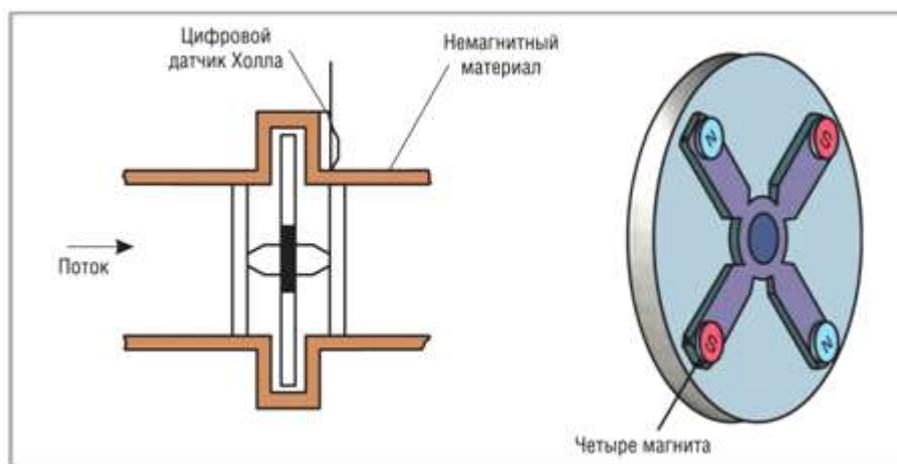


Рисунок 7.11 Датчик расхода

### 7.5 Целочисленный квантовый эффект Холла

Теория классического эффекта Холла достаточно разработана и даже обобщена на случай зонной структуры твердого тела, и вплоть до 1980 года казалось, что никаких открытий в этой области физики твердого тела не предвиделось. Однако в 1980 году немецкий физик Клаус фон Клитцинг с соавторами (Klaus von Klitzing, G. Dorda, M. Pepper), измеряя Э.Д.С. Холла и магнитосопротивление в поперечном магнитном поле в гетероструктурах, обнаружили, что в сильных полях ( $\sim 5-10$  Тл) холловская проводимость квантуется. Открытый эффект назвали целым квантовым эффектом Холла (аббревиатура IQHE – Integer Quantum Hall Effect), а Клаусу фон Клитцингу с соавторами в 1985 году была присуждена Нобелевская премия [7].

В теории эффекта Холла кроме постоянного Холла  $R = 1/ne$ ,

используется величина  $R_H$ , равная отношению возникающей поперечной формулы эффекта Холла разности потенциалов к продольному току. Из  $R_H = \frac{U}{I} = \frac{B}{bne}$ , эта величина называется поперечным сопротивлением или сопротивлением Холла. Сопротивление Холла – это сопротивление току, который создается вследствие возникающей в перпендикулярном магнитном поле поперечной разности потенциалов. Как видно из формулы Холловского сопротивления, оно должно зависеть от силы тока и индукции магнитного тока. Отношение падения напряжения вдоль направления тока к величине этого тока называют продольным сопротивлением  $R_{xx}$ , то есть сопротивление, используемое для характеристики обычных электрических проводников. При обычном эффекте Холла продольное сопротивление обычно слабо зависит от индукции магнитного поля, оставаясь по величине близким к своему значению при  $B = 0$ .

Закономерность классического эффекта Холла, выраженная в известной формуле поперечной разности потенциалов, хорошо выполняется в обычных трехмерных материалах при комнатных температурах. Если проводником является двумерный слой электронов, а температура достаточно низка и магнитное поле сильное, то вместо классического эффекта Холла, возникает эффект квантования Холловского сопротивления. Это квантовый эффект Холла (КЭХ), который в 1980 году Клаус фон Клитцинг открыл, за что в 1985 году получил Нобелевскую премию. Эффект является следствием свойств газа свободных электронов, который при низких температурах имеет особенно высокую степень вырождения. Он состоит в том, что при достаточно низких температурах в сильных магнитных полях на зависимости поперечного сопротивления, вырожденного двумерного электронного газа (ДЭГ) от величины нормальной составляющей к поверхности ДЭГ индукции магнитного поля (или от концентрации при фиксированном магнитном поле) наблюдаются участки с неизменным поперечным сопротивлением, плато. На некоторых участках Холловское сопротивление перестает зависеть от индукции магнитного поля, причем, эти участки дискретны. Данную зависимость можно наблюдать на экспериментальных кривых, показанных в соответствии с рисунком 7.12.

*Примечание:* гетероструктуры – это слоистая структура из различных полупроводников, выращенная на подложке.

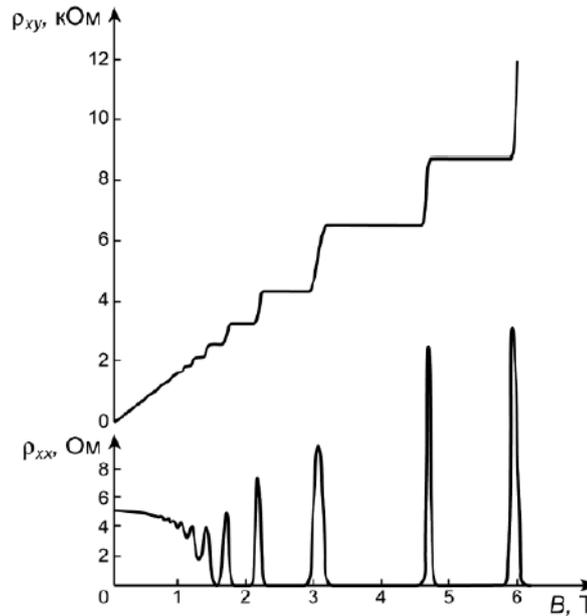


Рисунок 7.12 Экспериментальные кривые холловского сопротивления  $R_H = \rho_{xy}$  и удельного сопротивления  $\rho_{xx} \sim R_x$  гетероструктуры в зависимости от магнитного поля при постоянной при постоянной плотности носителей, соответствующей напряжению затвора  $V_g = 0$  В. Температура около 8 мК.

Значения сопротивления на этих плато равно  $R_H = \frac{h}{n \cdot e^2}$ , где  $n$  - последовательные целые

числа, называемые фактором заполнения. Двумерный слой электронов может быть, например, на границе раздела двух полупроводников или полупроводника и окисла. Низкие температуры, при которых наблюдается эффект, это температуры заметно ниже температуры кипения жидкого гелия, то есть  $T < 4,2$  К. Сильным является магнитное поле, в котором энергия циклотронного движения намного превышает энергию теплового движения. Кроме низкой температуры и сильного поля для наблюдения КЭХ необходимы образцы, в которых время свободного пробега носителей настолько велико, что электроны при движении по циклотронной орбите успевают совершить много оборотов за время между столкновениями.

Холловское сопротивление и соответствующее удельное сопротивление в двумерных системах равны между собой, это означает, что Холловское сопротивление не зависит от размера образца и является характеристикой материала.

**Определение постоянной тонкой структуры при помощи квантового эффекта Холла.**

Значения квантового сопротивления Холла не зависит от качества образца, его материала, размеров. На него не влияют границы, а также важное в классическом эффекте Холла закорачивание холловского напряжения омическими контактами. Оно не зависит от степени совершенства структур, наличия большого количества примесей и дефектов, температуры и силы измерительного тока. Поэтому с 1990 года калибровки сопротивления основаны на квантовом эффекте Холла с фиксированным значением  $R_H = 25812,807557(18)$  Ом. Квантовый эффект Холла позволяет также с огромной точностью определить постоянную тонкой структуры  $\alpha$ .

Постоянная тонкой структуры, обычно обозначаемая как  $\alpha$ , является фундаментальной физической постоянной, характеризующей силу электромагнитного взаимодействия. Она была введена в 1916 году немецким физиком Арнольдом Зоммерфельдом в качестве меры релятивистских поправок при описании атомных спектральных линий в рамках модели атома Бора, то есть характеризует так называемую тонкую структуру спектральных линий. Поэтому иногда она также называется постоянной Зоммерфельда.

Постоянная тонкой структуры  $\alpha$  – безразмерная величина

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

По более точным измерениям:

$$\alpha^{-1} = 137,035987(29) \quad \text{- данные 1984 г.}$$

$$\alpha^{-1} = 137,035999074(44) \quad \text{- данные 2010 г}$$

В системе единиц СИ она определяется следующим образом:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{e^2}{2\epsilon_0\hbar c}$$

Именно первые работы по КЭХ связанные с разработкой метода определения постоянной тонкой структуры с высокой точности по квантованию Холловского сопротивления, показали, что это сопротивление можно использовать как стандарт.

Постоянная тонкой структуры определяет тонкое расщепление энергетических уровней атома (и, следовательно, спектральных линий). Расщепление пропорционально  $\alpha^2$ . В квантовой электродинамике  $\alpha$  – естественный параметр, характеризующий силу электромагнитного взаимодействия.

Квантованный эффект Холла зависит только от фундаментальных постоянных и не подвержен влиянию нарушений структуры полупроводника. Основой открытия стали работы Фоулера, Фанга, Ховарда и Стайлса по наблюдению квантовых эффектов, в случае, когда электроны в проводнике заключены в области размером порядка 10 нм. Эту область называют двумерной электронной структурой (ДЭС) или двумерным электронным газом (ДЭГ), её исследование началось с 1975 года. Понимание роли ДЭС важно для описания многих оптических и электрических свойств микроэлектронных приборов, а также для объяснения механизма квантового эффекта Холла. Кроме роли ДЭГ для объяснения КЭХ необходим учет квантования Ландау электронного движения в сильном магнитном поле. Фон Клитцинг обнаружил нормальный или целочисленный квантовый эффект Холла. В 1982 году Тсуи открыл дробный квантовый эффект Холла, при котором фактор заполнения становится меньше единицы.

Рассмотрим более подробно условия наблюдения квантового эффекта Холла.

## 7.6 Двумерный электронный газ

**Создание двумерного электронного газа.** Наличие двумерного газа носителей заряда является одним из необходимых условий для наблюдения квантового эффекта Холла. Двумерный электронный газ может быть создан различными способами. Например, он может быть создан на поверхности полупроводника *Si* или *GaAs*, если его поверхность граничит с материалом, играющим роль изолятора (*SiO2* для кремниевых полевых транзисторов, и, например, *Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As* для гетероструктур).

Рассмотрим качественно образование двумерного дырочного газа в полевом транзисторе с индуцированным каналом с изолированным затвором, принципиальная схема которого показана в соответствии с рисунком 7.13. При приложении к затвору достаточного отрицательного напряжения (по отношению к истоку), дырки, находящиеся в объеме полупроводника, притянутся к нему. Пройти сквозь оксид кремния они не могут, уйти от него им мешает электрическое поле, созданное затвором. В тоже время в плоскости слоя от истока к стоку они могут двигаться свободно. В этом смысле слой можно назвать двумерным.

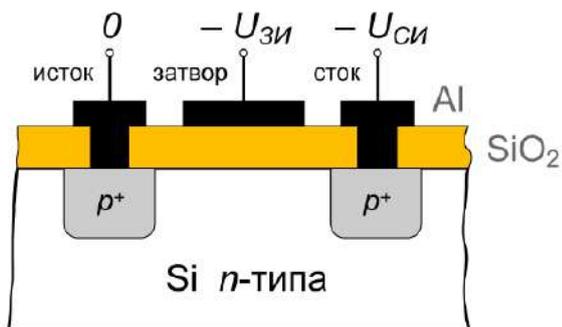


Рисунок 7.13 Устройство полевого транзистора с изолированным затвором

Также двумерный электронный газ можно получить, например, в гетероструктурах, т.е. слоистых структурах из различных полупроводников, в общем случае отличающихся шириной запрещенной зоны, выращенных на одной подложке. Например, в соответствии с рисунком 7.14, в случае гетероструктуры *AlGaAs/GaAs* электроны в слое *GaAs* будут находиться в так называемой квантовой яме. При этом электроны в плоскости, перпендикулярной направлению роста, могут двигаться свободно, а по третьему направлению их движение будет ограничено барьерами *AlGaAs*.

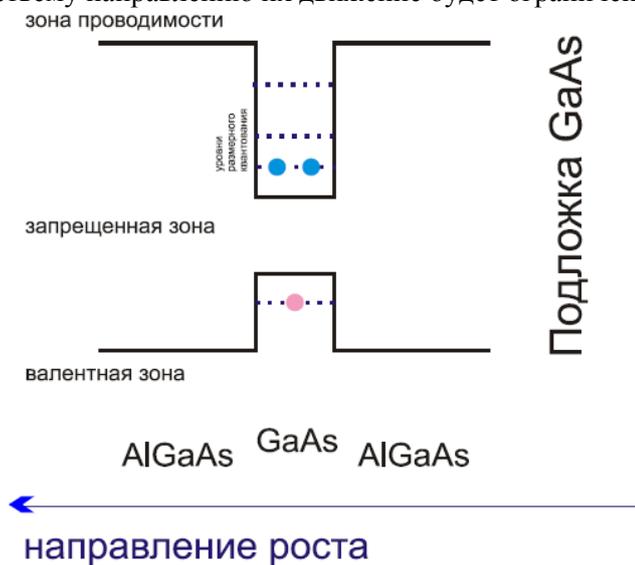


Рисунок 7.14 Схематическая зонная диаграмма в гетероструктуре AlGaAs/GaAs

Таким образом, в приведенных структурах электроны заперты вблизи поверхности полупроводника электростатическим полем  $F_z$ , которое создается положительными зарядами или электроны оказываются в потенциальной яме.

**Энергетический спектр двумерного электронного газа.** Квантовый эффект Холла - является следствием особенностей энергетического спектра двумерного электронного газа и влияния магнитного поля. При обычных условиях из-за малой плотности свободных электронов в полупроводнике они находятся в слабевырожденном состоянии, подчиняясь классической статистике Максвелла-Больцмана, поэтому их энергетический спектр квазинепрерывен. Если движение электронов в одном направлении ограничено, то получится двумерный электронный газ, необходимый для наблюдения квантового эффекта Холла. Энергетический спектр ДЭГ отличается от энергетического спектра трехмерного электронного газа.

Обычно в объемном полупроводнике энергия электронов непрерывна, ее можно сравнить с энергией свободного электрона с волновым вектором  $k$ , но с эффективной массой  $m^*$ :

$$E = \frac{\hbar^2}{2m^*} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$$

Если ограничить трехмерный электронный газ в направлении оси  $z$ , а движение в плоскости, перпендикулярной этой оси оставить свободным, то энергетический спектр свободного движения электрона останется непрерывным, а вдоль оси  $z$  электроны оказываются в потенциальной яме и, следовательно, их энергия может иметь лишь некие фиксированные значения  $E_n$ . Спектр энергии будет дискретный. Полная энергия будет иметь вид:

$$E = \frac{\hbar^2}{2m^*} (k_x^2 + k_y^2) + E_n$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$ , - номер подзоны размерного квантования,  $m^*$  - эффективная масса квазичастиц (электронов или дырок).

Если электроны находятся только в самой нижней (нулевой) подзоне (т. е. энергия вдоль оси  $z$  для всех двумерных электронов равна  $E_0$ ), то говорят о двумерном электронном газе. Если заполнено несколько подзон, то о квазидвумерном. Величину  $E_n$  можно найти, зная потенциал, который ограничивает движение электронов, и решив уравнение Шредингера.

В отличие от трехмерного случая, концентрация электронов определяется как число носителей заряда, приходящихся на единицу поверхности двумерного слоя. Она имеет размерность  $1/\text{см}^2$ . Поэтому в целочисленном КЭХ в двумерном электронном газе формула для холловского сопротивления будет иметь вид:

$$R_H = \frac{H}{nec} \text{ или } (R_H = \frac{B}{ne}), \text{ где } n - \text{ уже двумерная концентрация. Можно проверить, что эта}$$

величина имеет разность электрического сопротивления (Ом).

### 7.7 Роль магнитного поля.

#### Уровни Ландау в двумерном электронном газе

Как отмечено выше, одним из необходимых условий наблюдения квантового эффекта Холла является наличие магнитного поля. На классические заряженные частицы, движущиеся в магнитном поле, действует сила Лоренца  $F_L$ . Эта сила заставляет частицу вращаться с угловой скоростью,  $\omega = \frac{eB}{m}$ , называемую циклотронной частотой. Важно отметить, что магнитное поле проявляет себя только при наличии у частицы компоненты скорости, перпендикулярной магнитному полю.

Согласно законам квантовой механики, частицы, совершающие периодическое движение (движение финитно), могут обладать лишь дискретными значениями энергии. Поэтому у заряженных частиц в магнитном поле появляются уровни энергии, называемые *уровнями Ландау*.

Энергия  $i$ -го уровня в плоскости, перпендикулярной магнитному полю в трехмерном случае определяется выражением:

$$E_i = (i + \frac{1}{2})\hbar\Omega$$

Полная энергия:

$$E = (i + \frac{1}{2})\hbar\Omega + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*}$$

В двумерном электронном газе энергия по одному направлению может принимать лишь фиксированные значения. В то же время, наличие магнитного поля приводит к тому, что и по остальным двум направлениям энергетический спектр перестает быть непрерывным. В двумерном электронном газе в магнитном поле полная энергия электрона может принимать лишь некоторые фиксированные значения. Точное решение уравнения Шредингера для двумерного электронного газа, в котором заполнена одна подзона размерного квантования, дает следующие значения энергии:

$$E_i = E_0 + (i + \frac{1}{2})\hbar\Omega + sg\mu_B H$$

$i = 0, 1, 2, \dots$  - номер уровня Ландау.

Здесь  $E_0$  - энергия нижней подзоны размерного квантования,  $s = \pm 1/2$  спин электрона,  $g$  - фактор Ланде,  $\mu$  - магнетон Бора. Последний член берется из того условия, что разным направлениям спина электрона в магнитном поле соответствуют разные энергии. При наличии сильного магнитного поля, перпендикулярного двумерной плоскости энергетический спектр оказывается полностью квантованным.

**Кратность вырождения уровней Ландау и фактор заполнения.** Каждому уровню Ландау соответствует определенная энергия. На одном уровне может находиться лишь определенное число электронов на единицу площади образца. Это число называется *кратностью вырождения*  $N_H$ . Оно не зависит от номера уровня Ландау, от эффективной массы электрона, а определяется лишь мировыми константами и величиной магнитного поля. Кратность вырождения определяется по следующей формуле:

$$N_H = \frac{eB}{h}$$

Величину  $\nu = \frac{n}{N_H}$ , где  $n$  - концентрация двумерного газа, называют

*фактором заполнения.*

Она показывает, сколько уровней Ландау заполнено электронами при данной концентрации в заданном магнитном поле. Целый фактор заполнения означает, что какое-то число уровней Ландау полностью заполнено, а следующие (вышележащие) уровни пусты.

При квантовом эффекте Холла в двумерном электронном слое зависимость Холловского сопротивления от магнитного поля и концентрации перестает быть плавной, возникают особые значения сопротивления, не изменяющиеся при изменении поля и концентрации в довольно широком диапазоне. Важно отметить, что при этом продольное сопротивление, то есть отношение падения напряжения вдоль направления тока к величине этого тока становится равным нулю. Причина этого в следующем. Электрическое сопротивление возникает вследствие рассеяния электронов на препятствиях: примесях, дефектах решетки и т.д. при рассеянии изменяется направление скорости электрона, вследствие чего изменяется его вклад в величину тока. Если на уровне Ландау есть свободные места, то есть он заполнен частично, то рассеяние возможно в пределах одного энергетического уровня без существенного изменения энергии электрона. Если уровень Ландау заполнен полностью, все места на нем заняты, то электрон не может изменить своего положения относительно других электронов. Изменение импульса электрона возможно только при переходе на другой незаполненный уровень Ландау. Этот процесс связан с существенным изменением энергии. При низких температурах вероятность такого перехода мала. Данная вероятность пропорциональна

$e^{-\frac{\Delta E}{2kT}}$ , где  $\Delta E \propto \hbar \frac{e \cdot H}{m^* \cdot c}$  - расстояние по энергии между уровнями Ландау,  $k$  - постоянная

Больцмана.

Таким образом, при  $T = 0$  и целом факторе заполнения  $\nu$  продольное сопротивление обращается в нуль. Это означает, что ток течет только вдоль линий постоянного потенциала – эквипотенциалей. При этих условиях выполняется следующее соотношение между концентрацией и магнитным полем:

$$n = \nu \cdot N_H = \nu \frac{eB}{h}$$

Из полученных результатов следует, что сопротивление Холла

$$R_H = \frac{B}{n \cdot e} = \frac{h}{\nu \cdot e^2}$$

Таким образом, при целых факторах заполнения  $\nu$ ,  $R_H$  определяется только фундаментальными константами и целым числом  $\nu$ .

Говоря о факторе заполнения уровней Ландау необходимо обратить внимание на то, что он становится целым только при определенных значениях магнитного поля, поэтому продольное сопротивление должно обращаться в нуль только в некоторых точках. Однако в эксперименте

продольное сопротивление становится нулевым, а холловское – принимает значение, зависящее только от фундаментальных постоянных и целого числа, в некотором диапазоне магнитных полей, плато, а не при конкретных значениях индукции (напряженности) магнитного поля. В этом и состоит квантовый эффект Холла, открытый фон Клитцингом. Причина возникновения плато состоит в том, что электроны на уровне Ландау не обладают строго одинаковой энергией вследствие неоднородной толщины слоя окисла в МОП-структуре, неоднородного распределения положительного заряда в гетероструктуре, наличия заряженных ионов на границе раздела и тому подобное. В результате величина электростатической энергии электронов данного уровня Ландау образует не идеальную плоскость, а «холмистую местность» с «горами» и «ямами».

В 1983 году Р. Лафлин предположил, что электроны в двумерном слое вследствие сильного кулоновского отталкивания образуют несжимаемую квантовую жидкость - жидкость Лафлина, которая оказалась новым, не известным ранее, квантовым состоянием двумерной взаимодействующей системы. Она несжимаема и имеет энергетическую щель  $D$  в спектре возбуждений (по оценкам,  $D \sim 4-5K$ , что вполне соответствует эксперименту). За это открытие в 1998 году Лафлину, Штермеру и Тсуи была вручена Нобелевская премия по физике.

В настоящее время проблема двумерной электронной жидкости по-прежнему актуальна в современной физике.

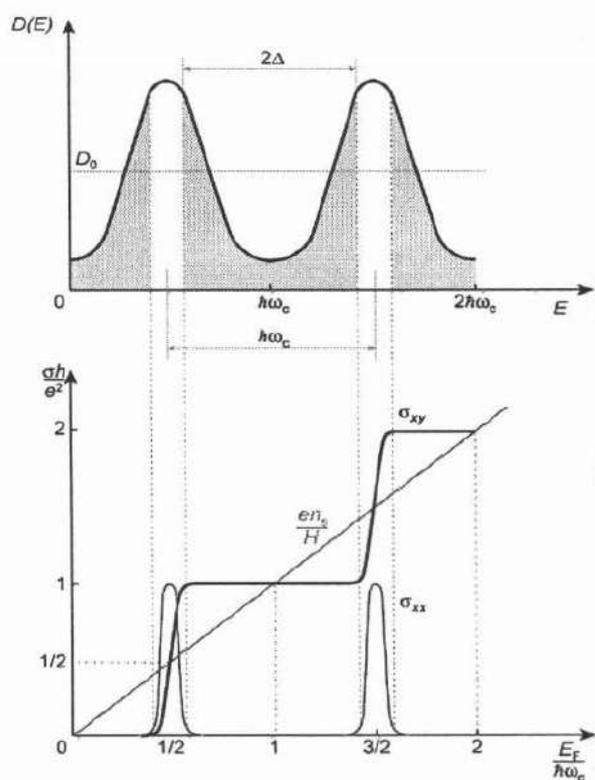
#### Дополнение

Для понимания квантового целочисленного эффекта Холла, можно рассмотреть качественное объяснение эффекта и роль примесей, приведенная в работе [36]. Целочисленный квантовый эффект Холла может быть объяснен на основе модели краевых состояний. Как правило, экспериментальный образец с двумерным электронным газом имеет границу, задаваемую литографическим краем или краем области под затвором. Возле края образуется обедняющее электрическое поле, направленное к краю (обусловленное отрицательно заряженными электронами). Оно приводит к зависимости нуля отсчёта уровней Ландау от координаты, поэтому уровни Ландау «изгибаются» вверх вблизи края. Известно, что в скрещенных магнитном и электрическом полях заряженная частица дрейфует вдоль линии постоянной энергии - эквипотенциали. Электроны заполняют состояния согласно статистике Ферми-Дирака до некоторого уровня Ферми.

При факторе заполнения  $\nu$ , близком к целочисленному значению вдали от краёв образуется локализованные состояния, не участвующие в проводимости, а вблизи краёв - краевые токовые состояния. Причем ток на противоположных гранях двумерного электронного газа имеет противоположное направление, а направление обхода однозначно задаётся знаком квантующего магнитного поля. Ток переносимый каждым краевым состоянием квантован и равен

$$\frac{e^2}{h} \mu,$$

где  $\mu$  – значение электрохимического потенциала. Число краевых каналов целое и определяется фактором заполнения  $\nu$ . В случае, когда локализованные и подвижные состояния на уровне Ферми пространственно разделены и обратное рассеяние подавлено, реализуется режим квантового эффекта Холла.



Локализация состояний спектра и осцилляции компонент проводимости 2D электронного газа в сильном магнитном поле. Локализованные состояния закрашены зелёным [8].

Влияние дефектов, примесей и других неоднородностей в кристалле состоит в том, что они «изолируют» отдельные электроны в «ловушках», являются причиной возникновения широких плато на графиках холловского сопротивления и широких минимумов омического сопротивления. На поверхности кристалла остаются дефекты и примеси, которые порождают энергетические «долины» и «холмы». Когда уровень Ландау оказывается заполненным, некоторые электроны попадают в ловушку и изолируются. Они больше не принимают участие в процессах электропроводности через кристалл. Это локализованные электроны. Они первыми заполняют и освобождают уровни Ландау при изменении магнитного поля, поддерживая точное заполнение уровней Ландау в энергетически гладкой области кристалла для протяженных интервалов величины магнитного поля. При этом холловское сопротивление образца и магнитосопротивление остаются постоянными. Для КЭХ необходимо точное заполнение уровней Ландау носителями заряда в энергетически гладкой области кристалла для конечного интервала напряженностей магнитных полей. Локализованные в ловушках электроны обеспечивают точное заполнение уровней Ландау. Поскольку возникновение ловушек является следствием неоднородностей, дефектов, то и само существование целочисленного квантового эффекта Холла зависит от наличия дефектов в кристалле. Без неоднородностей в кристалле, «идеально чистая» система приводила бы к линейному эффекту Холла, без квантованности.

*Примечание: обратим внимание на то, что фактор заполнения  $\nu$  может принимать не только целые, но и дробные значения.*

**Дробный квантовый эффект Холла.** Клаус фон Клитцинг обнаружил плато в холловском сопротивлении при целочисленных значениях фактора заполнения  $\nu$ . Это целочисленный КЭХ. В 1982 Даниэль Цуи и Хорст Штёрмер обнаружили, что плато в холловском сопротивлении в существенно более сильных магнитных полях наблюдается при  $\nu=1/3$ . В дальнейшем были обнаружены плато и при других дробных значениях  $\nu= 2/3, 1/5, 2/5, 3/5, 3/7$  и другие. Природу дробного квантового эффекта Холла (ДКЭХ) в 1985 году объяснил Р. Лаффлин. Открытие и объяснение ДКЭХ в 1998 году отмечено Нобелевской премией.

ДКЭХ нельзя объяснить на основе поведения одиночных электронов в магнитном поле. Это явление находит качественное объяснение в предположении о возможности «объединения» свободных электронов в новую «квазичастицу», являющуюся бозоном и имеющую положительный заряд, величина которого меньше заряда электрона. Возникновение такой квазичастицы связано с особым механизмом взаимодействия электронов, находящихся в магнитном поле. Как показано выше, магнитный поток квантован. Минимально возможная величина магнитного потока, то есть его квант определяется выражением  $\Phi_0=h/2e$ .

Магнитное поле создает «вихри», по одному на каждый квант магнитного потока. Принцип Паули требует, чтобы каждый электрон был окружен одним «вихрем». Когда магнитные поля превышают величину, соответствующую целочисленному квантовому эффекту Холла (ЦКЭХ) с  $i=1$  (первый уровень Ландау в двумерном электронном газе), вихрем становится больше, чем электронов. Для дальнейшего описания используется модель, в которой предполагается, что электроны захватывают вихри, превращаясь в некоторую новую квазичастицу. При этом принцип Паули выполняется при размещении нескольких вихрей на электроны, но в результате уменьшается межэлектронное кулоновское отталкивание. С точки зрения теории, такие «составные частицы» описывать гораздо легче, чем «свободные» электроны. Захваченный квант потока меняет природу частицы - электрона, «превращая» фермионы в бозоны. Спины электрона и кванта магнитного потока – полуцелые, поэтому электрон, захвативший четное число квантов потока, образует квазичастицу, являющуюся фермионом, а захвативший нечетное число квантов потока - образует квазичастицу - бозон. При заполнении на  $1/3$  нижнего уровня Ландау каждый электрон принимает три кванта магнитного потока. Таким образом, получается композитный бозон. Он находится в условиях нулевого магнитного поля (оно уже включено в новую частицу) и в состоянии бозе-конденсации (система переходит в новое энергетическое состояние). Можно определить энергетическую щель, необходимую для возникновения квантования холловского сопротивления и для обращения в ноль обычного сопротивления, экспериментальными методами.

Когда часть вихрей магнитного поля не захвачена, возникает дробный дефицит заряда в каждом из этих вихрей. По сравнению с электронами, это положительные дробные заряды. Квазичастицы могут свободно двигаться и проводить электрический ток. Образование плато на графиках происходит, как и в целочисленном квантовом эффекте Холла, из-за флуктуаций потенциала на дефектах кристалла. Отличие в том, что носители электрического тока - не электроны,

а частицы с дробным зарядом. Дробный квантовый эффект Холла объясняется захватом нечетного числа вихрей магнитного потока каждым электроном.

### **Вопросы для контроля знаний**

1. Квантование в микро- и макромире.
2. Сверхпроводимость.
3. Незатухающие токи и квантование магнитного потока в сверхпроводниках.
4. Квант магнитного потока.
5. Обоснование связи импульса и магнитного потока.
6. Экспериментальное обнаружение квантования магнитного потока.
7. Классический эффект Холла.
8. Применение классического эффекта Холла.
9. Датчики Холла.
10. Целочисленный квантовый эффект Холла.
11. Определение постоянной тонкой структуры при помощи квантового эффекта Холла.
12. Двумерный электронный газ.
13. Энергетический спектр двумерного электронного газа.
14. Уровни Ландау в двумерном электронном газе.
15. Кратность вырождения уровней Ландау и фактор заполнения.
16. Дробный квантовый эффект Холла.

## Глава 8. ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ. КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ.

### 8.1 Релятивистское преобразование электромагнитных полей, зарядов и токов

#### Электрическое поле в различных системах отсчёта

Как известно, механические явления во всех инерциальных системах отсчета (системах отсчета, движущихся относительно друг друга прямолинейно и равномерно) протекают одинаково. При этом невозможно установить, какая из этих систем покоится, а какие – движутся, и поэтому можно лишь говорить об относительном движении этих систем друг по отношению к другу.

С помощью электромагнитных явлений также нельзя получить доказательств существования абсолютного движения, а, следовательно, доказательств о существовании абсолютных систем отсчета. Все системы отсчета, движущиеся друг относительно друга прямолинейно и равномерно, равноправны, и во всех этих системах отсчета законы электромагнитных явлений одинаковы. В этом заключается принцип относительности для электромагнитных явлений: электромагнитные явления протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчета. Поэтому можно сформулировать принцип относительности разделения электромагнитного поля на электрическое поле и магнитное поле: раздельное рассмотрение электрического и магнитного полей имеет лишь относительный смысл.

Ранее рассматривались взаимные превращения электрических и магнитных полей, вызванные изменением полей во времени. Аналогичные явления имеют место и при движении электромагнитного поля относительно наблюдателя.

Предположим, что положительный заряд движется в магнитном поле в вакууме. С точки зрения первого наблюдателя (неподвижного относительно магнитного поля), на заряд действует сила Лоренца:

$$F = qvB \cdot \sin \alpha$$

где  $q$  - величина заряда;

$B = \mu_0 H$  - индукция магнитного поля;

$v$  - скорость заряда;

$\alpha$  - угол между направлением вектора индукции магнитного поля и вектором скорости частицы.

Направление этой силы перпендикулярно к  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ , совпадает с направлением векторного произведения  $[\vec{v} \times \vec{B}]$ .

Относительно второго наблюдателя, движущегося вместе с зарядом, заряд неподвижен, хотя на него действует та же сила  $\mathbf{F}$ . Но если неподвижный заряд действует сила, пропорциональная величине заряда, то это означает, что имеется электрическое поле. Напряженность такого поля можно определить по формуле

$$E = \frac{F}{q} = vB \cdot \sin \alpha \quad (8.1)$$

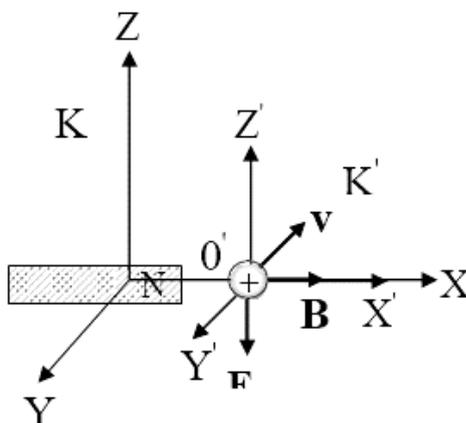


Рисунок 8.1

Вектор напряженности такого электрического поля по направлению совпадает с направлением силы  $\mathbf{F}$ , т. е. вектор напряженности электрического поля перпендикулярен векторам  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$  (рис. 8.1).

Таким образом, электромагнитное поле зависит от системы отсчета. Если в какой-либо системе отсчета существует одно магнитное поле, то в других системах отсчета, движущихся относительно первой, существует и магнитное и электрическое поля.

Рассмотрим поведение электрического поля в различных системах отсчета. Будем считать систему отсчета, в которой электрические заряды или проводники с зарядами покоятся, неподвижной системой отсчета – системой  $K'$ . Систему отсчета, движущуюся с некоторой скоростью  $v$  относительно системы отсчета  $K$ , подвижной системой отсчета, системой -  $K'$  (рис. 8.2).

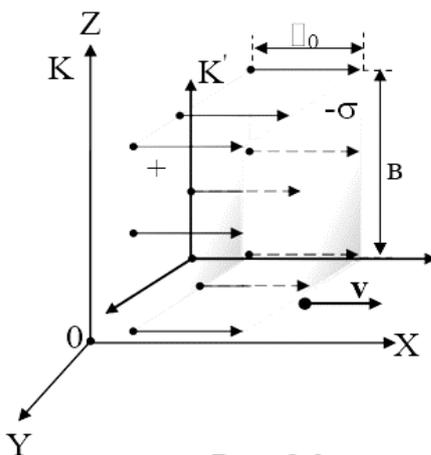


Рисунок 8.2

Предположим, что в системе отсчета  $K$  имеются две неподвижные, однородно заряженные параллельные пластины, несущие на себе заряды с плотностью  $\sigma$  и  $-\sigma$ . Пластины представляют собой квадраты со стороной « $v$ », параллельные плоскости  $ZOY$ . Расстояние между пластинами  $l_0$  мало по сравнению с размером пластин « $v$ ». В связи с этим электрическое поле между пластинами можно считать однородным. Пластины находятся в вакууме, т.е.  $\epsilon = 1$ . Величина электрического поля, измеренная наблюдателем, находящимся в  $K$  - системе, равна  $E_{II} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ . В данном случае определяются составляющая вектора напряженности электрического поля, параллельная оси  $OX$ . В системе отсчета  $K'$ , движущейся со скоростью  $\vec{v}$  в направлении  $OX$ , согласно преобразованиям Лоренца расстояние  $l$  уменьшается в  $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$  раз. Так как расстояние  $l$

между плоскостями не влияет на величину вектора  $\vec{E}$ , то что электрическое поле в данном направлении не изменяется. Картина силовых линий электрического поля для данного случая представлена на рис. 8.3.

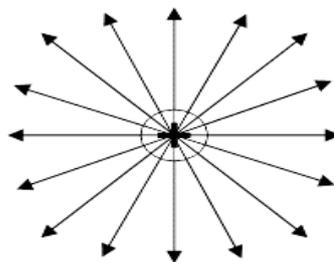


Рисунок 8.3

В другом случае (рис. 8.4), когда пластины параллельны плоскости  $XOY$  в системе  $K'$ , сокращается протяженность продольных сторон и квадраты становятся прямоугольниками,

сплюснутыми в направлении движения. Так как электрический заряд является инвариантной величиной (не изменяется) по отношению к выбору системы отсчета, т.е.  $q = q'$ , то при неизменности заряда уменьшается площадь поверхности, следовательно, в  $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$  раз возрастает поверхностная плотность заряда  $\sigma$ .

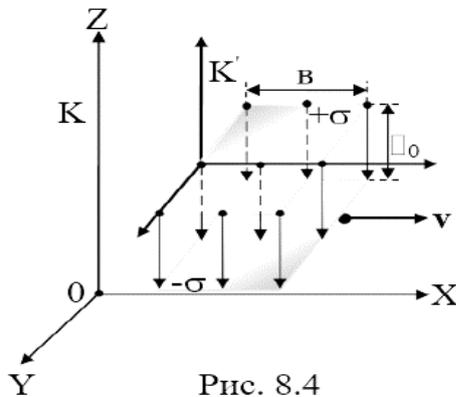


Рис. 8.4

Поэтому напряженность электрического поля в данном направлении будет равна

$$E' = E_{\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

т.е. поперечная составляющая напряженности электрического поля увеличивается в  $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$  раз по сравнению с неподвижной системой отсчета. В результате этого изменится картина силовых линий электрического поля положительного точечного заряда (рис.8.5). Они сгущаются в направлении, перпендикулярном к направлению движения заряда.

Можно показать, что аналогично будет происходить изменение напряженности электрического поля и в плоскости ZOХ.

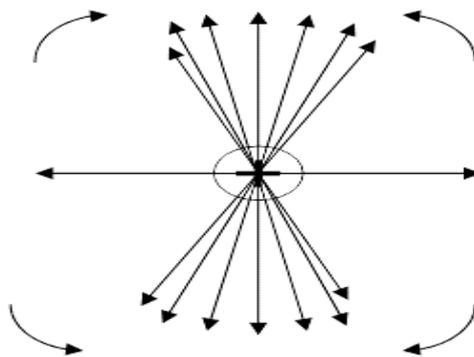


Рисунок 8.5

Полученные результаты можно представить в другом виде. Пусть имеются две системы отсчета  $K$  и  $K'$ . Система  $K'$  движется относительно системы  $K$  с постоянной скоростью  $v$  параллельно оси  $X$  (рис. 8.6). В системе  $K$  существует магнитное поле, которое характеризуется вектором напряженности  $H$ . В рассматриваемой точке пространства «А» составляющие вектора напряженности магнитного поля соответственно равны  $H_x, H_y, H_z$ . Тогда в этой же точке, но в системе  $K'$ , вследствие движения появится электрическое поле с напряженностью  $E$ , составляющие которого соответственно равны  $E_x, E_y, E_z$ . Применяя к отдельным составляющим напряженности электрического поля формулу (8.1), получаем

$$E_x = 0;$$

$$\begin{aligned} E_y &= vB'_z; \\ E_z &= -vB'_y; \end{aligned}$$

Если в системе  $K'$  имеется еще и электрическое поле, то результирующее электрическое поле в системе  $K$  будет характеризоваться результирующим вектором напряженности  $\mathbf{E}$ , составляющие которого соответственно равны

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x; \\ E_y &= E'_y + vB'_z; \\ E_z &= E'_z + vB'_y; \end{aligned}$$

Подчеркнем, что  $v$  – это скорость движения системы  $K'$  относительно системы  $K$ .

#### Магнитное поле в различных системах отсчёта

Известно, что при движении электрических зарядов (при движении электрического поля, при наличии тока) в пространстве возникает магнитное поле.

Для определения этого поля рассмотрим заряд  $+q$ , движущийся относительно первого наблюдателя со скоростью  $v$ . Такой заряд создает магнитное поле с напряженностью

$$H = \frac{qv}{4\pi r^2} \cdot \sin(\vec{v}, \vec{r})r, \quad (8.2)$$

где  $r$  – радиус-вектор, проведенный из заряда в рассматриваемую точку пространства.

Так как в выражении (8.2)  $\frac{q}{4\pi r^2} = D$ -индукция электрического поля, создаваемого зарядом в рассматриваемой точке А, которая связана с напряженностью электрического поля соотношением  $D = \epsilon_0 E$ , то с учетом направления вектора  $\mathbf{D}$  (направление которого совпадает с направлением радиус-вектора  $r$  в данной точке) можно записать

$$H = vD \cdot \sin(v, D). \quad (8.3)$$

Выражение (8.3) является модулем векторного произведения, т.е.

$$H = [\vec{v} \times \vec{D}] \quad (8.4)$$

Соотношение (8.4) позволяет утверждать, что вектор  $\mathbf{H}$  перпендикулярен векторами  $v$  и  $\mathbf{D}$ .

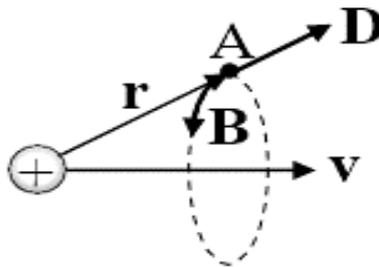


Рисунок 8.7

Для второго наблюдателя, движущегося вместе с зарядом, существует только электрическое поле, вектор индукции которого равен  $\mathbf{D}$ . Таким образом, в неподвижной системе отсчета существует только электрическое поле, а в подвижной системе отсчета существует электрическое и магнитное поля (рис. 8.7).

Установим связь между характеристиками электрического и магнитного полей. Для чего введем две системы отсчета, одна из которых ( $K$ ) движется относительно другой ( $K'$ ) в направлении  $X'$  (рис. 8.8). Будем считать, что заряд покоится в системе отсчета  $K'$ . В этом случае электрическое поле выбранного заряда будет двигаться относительно системы  $K$  со скоростью « $-v$ ». Воспользовавшись формулой (8.6) для составляющих вектора напряженности магнитного поля (с учетом знака скорости  $v$ ), будем иметь

$$\begin{aligned} H_x &= 0; \\ H_y &= +vD_{1z}; \\ H_z &= -vD_{1y}. \end{aligned}$$

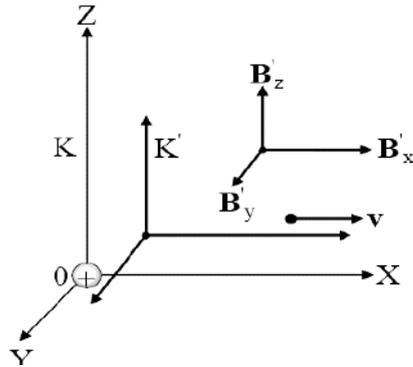


Рисунок 8.8

Если в системе  $K'$  имеется еще и магнитное поле с составляющими напряженности  $H_{1x}, H_{1y}, H_{1z}$ , то результирующее магнитное поле в рассматриваемой точке пространства будет характеризоваться составляющими векторами напряженности этого магнитного поля:

$$\begin{aligned} H_x &= H'_x; \\ H_y &= H'_y + vD'_z; \\ H_z &= H'_z - vD'_y; \end{aligned} \quad (8.5)$$

В соотношениях (8.5) скорость  $v$  – скорость движения системы  $K$  (в которой имеется магнитное поле с составляющими вектора напряженности  $H_x, H_y, H_z$ ) относительно системы  $K'$ .

Надо отметить, что соотношения (8.5) для преобразования магнитных полей справедливы только в том случае, когда движение происходит со скоростями гораздо меньше, чем скорость распространения света в вакууме.

#### Электромагнитное поле в различных системах отсчета

Выражение для силы Лоренца, действующей на точечный заряд в электромагнитном поле, получено с учетом требований инвариантности релятивистского уравнения движения:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]).$$

Следовательно, выражение для силы Лоренца также должно быть релятивистски-инвариантным, т.е. иметь одинаковый вид во всех инерциальных системах отсчета. Таким образом, если имеются две системы отсчета  $K$  и  $K'$ , одна из которых, например  $K'$ , движется равномерно и прямолинейно со скоростью  $\mathbf{v}$  относительно системы  $K$ , то выражения для силы Лоренца в этих системах отсчета будут иметь вид

$$\bar{\mathbf{F}} = q(\bar{\mathbf{E}} + [\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}}]) \quad (8.6)$$

$$\bar{\mathbf{F}}' = q(\bar{\mathbf{E}}' + [\bar{\mathbf{v}}' \times \bar{\mathbf{B}}']) \quad (8.7)$$

Используя релятивистскую инвариантность выражения для силы Лоренца (8.6) и (8.7) и учитывая формулы преобразования для сил при переходе из одной инерциальной системы в другую, можно получить соотношения между векторами электрического и магнитного полей электромагнитного поля в различных системах отсчета. Частный случай таких преобразований был рассмотрен ранее. Частный случай таких преобразований был рассмотрен ранее.

Формулы преобразования сил имеют вид

$$F_x = F'_x + \frac{vu_y}{\sqrt{1-\beta^2}} F'_y + \frac{vu_z}{\sqrt{1-\beta^2}} F'_z;$$

$$F_y = \frac{1-\frac{vu_x}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} F'_y;$$
(8.8)

$$F_z = \frac{1-\frac{vu_x}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} F'_z;$$

где  $v$  – относительная скорость движения систем отсчета;

$u_x, u_y, u_z$  – проекции скорости движения заряженной частицы на соответствующие оси координат;

$$\sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Подставим в формулу (8.8) вместо  $F_y$  и  $F'_y$  их выражение (8.6),(8.7), будем иметь

$$E_y + (u_z B_x - u_x B_z) = \frac{1-\frac{v u_x}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} [E'_y + (u'_z B'_x - u'_x B'_z)]. \quad (8.9)$$

Исключая из формулы (8.9) величины  $u'_x$  и  $u'_z$  с помощью формул сложения скоростей в теории относительности  $u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}$  и  $u'_z = \frac{u_z \sqrt{1-\beta^2}}{1 - vu_x/c^2}$ , группируя все члены в левой части соотношения (8.9), находим

$$\left( E_y - \frac{E'_y}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{v B'_z}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) + \left( -B_z + \frac{v E'_y}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{B'_z}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) + (B_x - B'_x) u_z = 0 \quad (8.10)$$

Равенство (8.10) справедливо при произвольных значениях  $u_x$  и  $u_z$ . Следовательно, выражения, стоящие в скобках (8.10), по отдельности равны нулю. Приравнявая их нулю, получаем формулы преобразования для векторов электромагнитного поля:

$$E_y = \frac{E_y + v B_z}{\sqrt{1-\beta^2}};$$

$$B_x = B'_x$$

$$B_z = \frac{B_z + (\frac{v}{c^2}) E'_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (8.11)$$

Аналогично, исходя из соотношения (8.8), можно получить формулы преобразования для других компонент векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ :

$$E_z = \frac{E_z - v B_y}{\sqrt{1-\beta^2}};$$

$$B_x = B'_x$$

$$B_z = \frac{B_z + (\frac{v}{c^2}) E'_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (8.12)$$

Вывод формулы преобразования для проекции вектора напряженности электрического поля ( $E_x$ ) можно провести с использованием соотношения

$$F_x = \frac{1}{1 + vu'_x/c^2} [F'_x + \frac{v}{c^2} (\vec{F}' * \vec{u}')] \quad (8.13)$$

Поступая так же, и в предыдущих случаях, приводим соотношения (8.13) к виду

$$\left(1 + \frac{VU'_x}{c^2}\right) [E_x + (U_y B_z - U_z B_y)] - [E'_x + (U'_y B'_z - U'_z B'_y)] = \frac{V}{c^2} (\vec{E}' * \vec{u}),$$

где,  $\vec{F}' * \vec{u} = q \vec{E}' * \vec{u}$

Воспользовавшись формулами (8.11) и (8.12), находим, что

$$E_x = E'_x$$

Таким образом, формулы преобразования для векторов электромагнитного поля имеют вид

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x; B_x = B'_x; \\ E_y &= \frac{E'_y + vB'_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}; B_y = \frac{B'_y - (v/c^2)E'_z}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ E_z &= \frac{E'_z - vB'_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}; B_z = \frac{B'_z + (v/c^2)E'_y}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \quad (8.14)$$

Формулы преобразования векторов электромагнитного поля (8.14) позволяют определить векторы этого поля в любой инерциальной системе отсчета, если они известны в какой-либо одной из них.

#### Доказательство инвариантности электрического заряда

Пусть положительный электрический заряд движется в  $K$ - системе, как это показано на рис. 8.9, поперёк электрического поля с напряжённостью  $\vec{E}$ . Тогда в системе  $K'$ , движущейся со скоростью  $\vec{v}$ , на неподвижный в этой системе заряд действует сила

$$F' = \frac{qE}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (8.15)$$

Из релятивистской динамики известно, что в системе  $K'$ , (на движущуюся материальную частицу при условии  $\angle(\vec{F}, \vec{v}) = 90^\circ$  действует сила

$$F' = \frac{m_0 a}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{q'E}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (8.16)$$

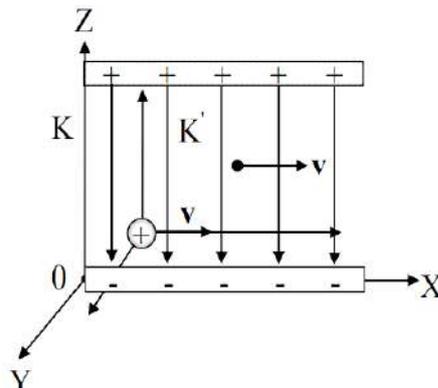


Рисунок 8.9

Поскольку левые части равенств (8.15) и (8.16) равны, то равны и правые части, что возможно, когда  $q = q'$ . Такой вывод согласуется со сделанным выше предположением об инвариантности заряда и может рассматриваться как простое доказательство данного утверждения.

Надо отметить, что объемная плотность заряда  $\rho$  изменяется в соответствии с преобразованиями Лоренца. Это связано с тем, что объемная плотность заряда

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

При равномерном распределении заряда

$$\rho = \frac{q}{V}$$

Объем при переходе из одной инерциальной системы в другую изменяется, согласно преобразованиям Лоренца, по закону

$$V = V_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = V_0 \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Следовательно, при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую объемная плотность заряда изменяется согласно закону:

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

При переходе из одной инерциальной системы в другую для электрического заряда получим

$$q = \rho V = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} * V_0 \sqrt{1 - \beta^2} = \rho_0 V_0 = q_0. \quad (8.14)$$

Из соотношения (8.17) видно, что действительно при переходе из одной системы отсчета в другую заряд остается величиной постоянной, т.е. электрический заряд инвариантен относительно преобразований Лоренца. Известно, что закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме в неподвижной системе отсчета отображает зависимость плотности тока от напряженности электрического поля:

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}.$$

Можно показать, что плотность тока  $\vec{j}$  в неподвижной среде, в которой заряды движутся со скоростью  $\vec{v}$  в электромагнитном поле с напряженностями  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , изменяется в соответствии с преобразованиями Лоренца по закону

$$\vec{j} = \gamma \frac{\vec{E} + [\vec{v} * \vec{B}]}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

где величины векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  (так же, как и векторов  $\vec{E}'$  и  $\vec{B}'$ ) определены так же, как в классической электродинамике, т.е., по существу, равенствами (8.6 и 8.7).

## 8.2. Инвариантность уравнений Максвелла относительно преобразований Лоренца

Как известно, механические явления в различных системах отсчета, движущихся друг относительно друга прямолинейно и равномерно, протекают одинаково. С помощью механических измерений невозможно установить, какая из этих систем покоится, а какие – движутся, и поэтому можно лишь говорить об относительном движении этих систем друг по отношению к другу (принцип относительности для механических явлений).

Рассматривая поведение электрических, магнитных и электромагнитных полей при переходе от одной инерциальной системы в другую, было установлено, что с помощью электромагнитных явлений также нельзя установить существование абсолютного движения и поэтому нельзя обнаружить привилегированную систему отсчета. Все инерциальные системы отсчета равноправны

между собой и во всех этих системах законы электромагнитных явлений одинаковы. В этом заключается физическая сущность принципа относительности для электромагнитных явлений.

Таким образом, существует одно абсолютное понятие – "единое электромагнитное поле", а его разделение на электрическую и магнитную составляющие является относительным и зависит от системы отсчета, которую выбирают для описания электромагнитных процессов. Это означает, что основная система уравнений электродинамики – система уравнений Максвелла – Лоренца – должна быть инвариантной. Ранее было показано, что система уравнений Максвелла в дифференциальной форме имеет вид

1.  $\text{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t};$
2.  $\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t};$
3.  $\text{div}\vec{B} = 0;$
4.  $\text{div}\vec{D} = \rho;$

В этой системе векторы **E**, **H**, **B**, **D** представляют собой характеристики электрического и магнитного полей,  $\rho$  - объемная плотность заряда и  $\vec{j}$  - вектор плотности электрического тока, связанный с объемной плотностью заряда соотношением

$$\vec{j} = \rho\vec{u},$$

где  $\vec{u}$  - скорость движения заряда.

При этом  $\rho$  и  $\vec{j}$  отличны от нуля только в тех областях пространства, которые заняты зарядами. В проекциях на оси координат неподвижной системы отсчета система уравнений имеет вид

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j_x + \frac{\partial D_x}{\partial t};$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j_y + \frac{\partial D_y}{\partial t};$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j_z + \frac{\partial D_z}{\partial t}.$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t};$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t};$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}.$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0.$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho.$$

При переходе из одной системы отсчета в другую проекции векторов электромагнитного поля **E**, **H**, **B**, **D** связаны между собой соотношениями

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x; & B_x &= B'_x; \\ E_y &= \frac{E'_y + vB'_z}{\sqrt{1-\beta^2}}; & B_y &= \frac{B'_y + (v/c^2)E'_z}{\sqrt{1-\beta^2}}; \end{aligned}$$

$$E_z = \frac{E'_z - vB'_y}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad B_z = \frac{B'_z - (v/c^2)E'_y}{\sqrt{1-\beta^2}};$$

$$E_x = E'_x; \quad H_x = H'_x;$$

$$E_y = \frac{E'_y + vH'_z}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad H_y = \frac{H'_y - \beta E'_z}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$E_z = \frac{E'_z - vH'_y}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad H_z = \frac{H'_z + \beta E'_y}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

или

$$E'_x = E_x; \quad H'_x = H_x;$$

$$E'_y = \frac{E_y - \beta H_z}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad H'_y = \frac{H_y + \beta E_z}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$E'_z = \frac{E_z + \beta H_y}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad H'_z = \frac{H_z - \beta E_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (8.18)$$

Однако так как в векторной форме при  $v_y = v_z = 0$ , а  $v_x = v$  одно из уравнений (8.18), например, имеет вид

$$\vec{E}' = \frac{1[\vec{v} * \vec{H}]}{c\sqrt{1-\beta^2}},$$

то можно утверждать, что уравнения Максвелла в векторной форме не меняют своей формы при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой инерциальной системе отсчета, т.е. они инвариантны.

### 8.3 Квазистационарное электромагнитное поле

При изучении переменных полей и токов необходимо принять во внимание два фактора:

- 1) конечную скорость распространения электромагнитных полей;
- 2) порождение магнитного поля, изменяющимся электрическим полем.

При не очень большой частоте переменного тока этими факторами можно пренебречь, т.е. считать, что электромагнитные поля распространяются в пространстве мгновенно, а токи смещения не существуют или магнитное поле порождается только токами проводимости. Токи и поля, удовлетворяющие этим условиям, называются квазистационарными.

Математически квазистационарность электромагнитных полей можно установить из следующих соображений.

Пусть имеется электромагнитное поле (периодический процесс), распространяющееся от источника со скоростью  $v$ . Тогда длина волны этого процесса, т.е. расстояние, на которое распространится электро-магнитное поле за время, равное одному периоду  $T$ , равна

$$\lambda = vT.$$

Пренебречь пространственным изменением некоторой величины, характеризующей процесс, можно только в том случае, если она рассматривается в областях, линейные размеры которых много меньше длины волны:

$$\ell \ll \lambda \quad (8.19)$$

Полученное соотношение (8.19) и является одним из условий квазистационарности электромагнитных полей (критерием пренебрежения конечной скоростью распространения этих полей).

Условие квазистационарности электромагнитных полей, возможно, в том случае, когда поля возникают в результате движения системы зарядов, совершающих медленное, квазистационарное (как бы стационарное) движение. В этом случае в уравнениях Максвелла производные от векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  по времени малы по сравнению с пространственными производными, что несколько изменяет вид самих уравнений.

Медленное движение заряженных частиц предполагает их движение со скоростью  $|\vec{v}|$ , значительно меньшей по сравнению со скоростью распространения света в вакууме, которая является скоростью распространения всех электромагнитных взаимодействий. В этом случае можно приближенно считать, что поле в каждый момент времени определяется мгновенным расположением электрических зарядов. Кроме того, движущиеся заряды не могут покинуть пределы некоторой ограниченной области пространства.

Поскольку частицы (электрические заряды) не могут выйти за границы области, на ограничивающей ее поверхности должно выполняться условие

$$j_n = 0,$$

где  $j_n$  - нормальная составляющая вектора плотности тока к поверхности.

При медленном движении зарядов изменение объемной плотности зарядов мало, следовательно

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Это означает, что уравнение непрерывности будет иметь вид

$$\text{div } j = 0.$$

Таким образом, при квазистационарном движении зарядов вектор плотности тока имеет соленоидальный характер, что позволяет представить их траектории движения в виде некоторых замкнутых трубок или нитей.

Для каждой замкнутой трубки с током, при условии совпадения направлений векторов  $\vec{j}$  и  $d\vec{\ell}$ , можно записать

$$\vec{j} \cdot dV = \vec{j} \cdot dS \cdot d\ell = j \cdot dS \cdot d\vec{\ell} = I \cdot d\vec{\ell} \quad (8.20)$$

где  $dS$  - сечение трубки;

$j \cdot dS = I$  - величина постоянного тока;

$d\vec{\ell}$  - элемент длины трубки с током.

Проинтегрировав соотношение (9.2) по всему объему, получим

$$\int_V \vec{j} \cdot dV = \int_L \oint dI \cdot d\vec{\ell} = \int dI \cdot \oint_L d\vec{\ell} = 0 \quad (9.21)$$

так как  $\oint_L d\vec{\ell} = 0$ .

Смысл равенства (9.21) заключается в том, что в квазистационарном состоянии полный ток через любое сечение трубки равен нулю, т.е. число зарядов, проходящих по нормали к сечению через все трубки с током в обоих направлениях, должно быть одинаковым, поскольку заряды совершают движение в ограниченном объеме пространства.

С учетом данных замечаний можно установить систему уравнений Максвелла для такого движения электрических зарядов, оценить (по порядку величины) входящие в них величины.

Для оценки порядка величины производных по времени, содержащихся в уравнениях Максвелла, с учетом того, что система совершает периодическое или почти периодическое движение, имеем

$$\left| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right| \sim \frac{E}{T}, \quad \left| \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right| \sim \frac{H}{T},$$

где  $T$  – характерный период движения;

$E$  и  $H$  – характерные средние абсолютные значения напряженностей электромагнитного поля в области пространства, занятой системой зарядов.

Оценку величин  $rot \vec{E}$  и  $rot \vec{H}$  в той же области пространства, можно сделать с учетом того, что поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в реальных системах, совершающих квазистационарное движение, изменяются от точки к точке плавно. Если  $L$  – средние размеры системы, то для пространственных производных по порядку величины будем иметь

$$\left| \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \right| \sim \left| \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} \right|, \quad \left| \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \right| \sim \frac{E}{L}, \quad (8.22)$$

Полученное соотношение (8.22) и является оценочным для пространственных производных уравнений Максвелла для квазистационарных электромагнитных полей.

Так как при условии квазистационарности временные изменения полей происходят достаточно медленно, то в уравнениях Максвелла можно опустить члены, содержащие производные по времени с соответствующим коэффициентом как малые по сравнению с членами, характеризующими пространственное изменение полей. Для этого должны выполняться (по порядку величины) неравенства

$$\left| \frac{\partial E_i}{\partial x_k} \right| \sim \left| \frac{1}{c} \frac{\partial H_i}{\partial t} \right|; \quad \left| \frac{\partial H_i}{\partial x_k} \right| \gg \frac{1}{c} \left| \frac{\partial E_i}{\partial t} \right|, \quad (8.23)$$

или

$$\frac{H}{L} \gg \frac{1}{c} * \frac{E}{T}, \quad \frac{E}{T} \gg \frac{1}{c} * \frac{H}{T}. \quad (8.24)$$

При этом одновременно должны выполняться приближенные равенства:

$$\frac{\partial E_i}{\partial x_k} \approx \frac{\partial E_k}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial H_i}{\partial x_k} \approx \frac{\partial H_k}{\partial x_i}$$

Разности пространственных производных, входящих в уравнение Максвелла, взаимно компенсируют друг друга, а временные производные (с коэффициентом  $\frac{1}{c}$ ) оказываются величинами старшего порядка малости. Из неравенств (8.23) и (8.24) можно получить условие квазистационарности электромагнитного поля

$$T \gg \frac{L}{c} \quad \text{или} \quad c \gg \frac{L}{T} v, \quad (8.24)$$

где  $v$  – характерная скорость движения электрических зарядов.

Из соотношения (8.25) видно, что при квазистационарном движении электрических зарядов их скорости должны быть малы по сравнению со скоростью распространения электромагнитного поля.

С учетом изложенного уравнения Максвелла для квазистационарных электромагнитных полей приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} 1) \quad & rot \vec{H} = \vec{j}; \\ 2) \quad & rot \vec{E} = 0; \\ 3) \quad & div \vec{B} = 0; \\ 4) \quad & div \vec{D} = p; \end{aligned} \quad (8.26)$$

Таким образом, в случае квазистационарных электромагнитных полей ток смещения не входит в уравнения Максвелла.

Система уравнений Максвелла оказывается распавшейся на уравнения для независимых полей: магнитного поля токов и электрического поля зарядов.

Объемная плотность электрического заряда в уравнениях (8.26) зависит от времени, как от параметра. В приближении медленно движущихся электрических зарядов решение уравнений для электрического поля приводит к очевидному результату: в каждый момент времени электрическое поле совпадает с электростатическим полем данной системы зарядов.

#### 8.4 Квазистационарные электрические токи

Предположим, что для токов смещения и токов проводимости справедливо условие

$$|j_{cm}|_{max} \ll |j|_{max}.$$

Так как  $j_{cm} = \frac{\partial D}{\partial t}$ ,  $D = D_0 * \exp(i\omega t)$ , то

$$j_{cm} = i\omega D = i\omega \epsilon E.$$

С учетом того что  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ ,  $\vec{j}_{cm} = i\omega \vec{D} = i\omega \epsilon \vec{E}$ , можно записать:

$$\frac{|j_{cm}|_{max}}{|j|_{max}} = \frac{\omega \epsilon}{\gamma} = \omega \epsilon \rho \ll 1,$$

где  $\omega$  - частота распространяющегося электромагнитного поля;

$\epsilon$  - относительная диэлектрическая проницаемость среды;

$\gamma$  - удельная проводимость среды;

$\rho$  - удельное сопротивление среды.

Для металлических проводников  $\epsilon \approx \epsilon_0$ ,  $\rho \approx 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ , получаем, что токи смещения несущественны в области частот:

$$\omega \ll \frac{1}{\epsilon_0 \rho} \approx \frac{10^{18}}{10^{20} c^{-1}}, \quad (8.27)$$

т.е. вплоть до частот, соответствующих ультрафиолетовой части спектра.

Соотношение (8.27) является условием квазистационарности токов (критерием пренебрежения токами смещения).

С учетом того что инерционные свойства среды играют существенную роль, частотная оценка возникновения токов смещения на несколько порядков меньше, однако и после этого диапазон частот, при которых можно пренебречь токами смещения по сравнению с токами проводимости, остается очень большим.

Надо отметить, что для переменных электромагнитных полей в вакууме и диэлектрике учет токов смещения как источника магнитного поля является необходимым при всех частотах, поскольку в них токи проводимости отсутствуют. Наличие токов смещения обуславливает существование электромагнитных волн.

Что касается критерия пренебрежения конечной скоростью распространения электромагнитных волн, то его роль определяется относительной величиной частоты и пространственных размеров области, в которой изучается процесс. Так, например, для технического тока частотой 50 Гц длина волны  $\lambda \approx 6 \cdot 10^6$ . Поэтому при рассмотрении вопросов, связанных с его передачей в пределах нескольких километров, этот ток можно рассматривать как квазистационарный. Если же рассматриваются вопросы, связанные с его передачей на многие тысячи километров, необходимо учитывать его переменность вдоль линии электропередачи и нельзя считать такой ток квазистационарным. Токи больших частот не являются квазистационарными даже при небольших размерах пространства.

Примером квазистационарного тока с определенной степенью точности может служить переменный ток, применяемый в различных областях промышленности и быту. Получают такой ток в устройствах, получивших название генераторов.

Возникновение переменного тока основано на возбуждении ЭДС индукции в контуре, вращающемся в магнитном поле.

Рассмотрим плоский прямоугольный контур  $abcd$ , который может равномерно вращаться вокруг оси  $OO'$  с угловой скоростью  $\omega = const$ , перпендикулярной однородному магнитному полю, с индукцией  $B = const$  (рис. 8.10). Магнитный поток  $\Phi$ , связанный с таким контуром в любой момент времени  $t$ , будет равен

$$\Phi = BS * \cos \omega t,$$

где  $S$  - площадь, ограниченная контуром;

$\omega t = \varphi$  - угол поворота контура, отсчитываемый от начального положения контура, при котором  $S \perp B$ .

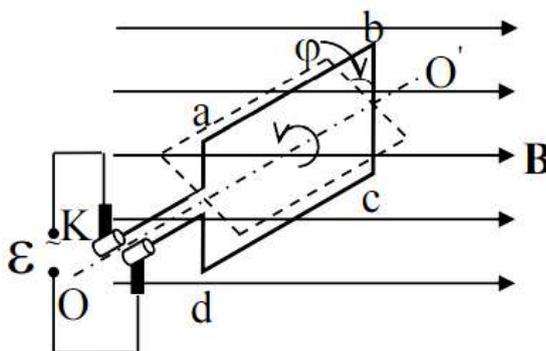


Рисунок 8.10

При вращении контура поток  $\Phi$  периодически изменяется. В связи с этим в контуре возникает периодически изменяющаяся ЭДС индукции, равная, согласно закону Фарадея,

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = BS\omega * \sin \omega t.$$

Максимальное значение этой ЭДС (наступающее при  $\sin \omega t = 1$ ) равно

$$\varepsilon_m = BS\omega.$$

Тогда

$$\varepsilon = \varepsilon_m * \sin \omega t.$$

Следовательно, если в однородном магнитном поле равномерно вращается проводящий контур, то в нем возникает переменная ЭДС, изменяющаяся по синусоидальному закону. Эта ЭДС создает в контуре синусоидальный переменный ток:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_0} = \frac{\varepsilon_m}{R_0} * \sin \omega t = I_m * \sin \omega t \quad (8.28)$$

где  $I_m = \frac{\varepsilon_m}{R_0}$  - максимальное значение тока;

$R_0$  - сопротивление контура и электрической цепи, в которую отводится ток.

Из уравнения (8.28) видно, что переменный ток является колебательным (гармоническим) процессом. Поэтому названия характеристик колебательного процесса сохраняются и за характеристиками переменного тока. Так, например, называют:

$\varepsilon_m$  - амплитудой ЭДС;

$I_m$  - амплитудой тока;

$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$  - круговой частотой тока;

$\nu$  - частотой тока;

$T$  - периодом тока;

$\omega t$  - фазой тока.

На рис. 8.11 представлены графики изменения ЭДС и величины (силы) переменного тока. Очевидно, что изменения ЭДС и тока совершаются в данном случае в одинаковых фазах.

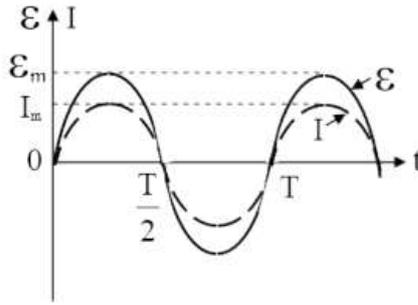


Рисунок 8.11 Графики изменения ЭДС и силы тока

### Работа и мощность переменного электрического тока

Известно, что работа  $A$ , совершаемая за время  $t$  постоянным током  $I$  на сопротивлении  $R_0$ , равна

$$A = I^2 R_0 t,$$

а мощность  $P$  постоянного тока выражается соотношением

$$P = I^2 R_0.$$

В случае переменного тока величина  $I$  изменяется со временем. Для малого промежутка времени  $dt$  величину тока  $I$  можно считать постоянной. Поэтому для выражения элементарной работы  $dA$ , совершаемой переменным током за время  $dt$ , можно записать

$$dA = I^2 R_0 * dt = I_m^2 R_0 \sin^2 \omega t * dt = I_m^2 R_0 \sin^2 \left( \frac{2\pi t}{T} \right) * dt$$

Тогда работа  $A$ , совершаемая переменным током, равна

$$A = \int_0^T dA = I_m^2 R_0 \int_0^T \sin^2 \left( \frac{2\pi t}{T} \right) * dt = \frac{I_m^2}{2} R_0 T = I_{\text{эф}}^2 R_0 T, \quad (8.29)$$

где  $I_{\text{эф}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$  - эффективная сила переменного тока, или эффективный (действующий) ток.

С учетом формулы (8.29) для средней мощности переменного тока получим

$$P = I_{\text{эф}}^2 R_0.$$

Аналогично эффективному току вводится понятие эффективного (действующего) напряжения:

$$U_{\text{эф}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \approx 0.71 U_m,$$

где  $U_m$  – максимальное (амплитудное) значение переменного напряжения.

Пользуясь понятиями эффективного тока и эффективного напряжения, можно записать выражения для работы и мощности переменного тока в виде

$$A = I_{\text{эф}}^2 R_0 t = I_{\text{эф}} U_{\text{эф}} t = \frac{U_{\text{эф}}^2}{R_0} t;$$

$$P = I_{\text{эф}}^2 R_0 = I_{\text{эф}} U_{\text{эф}} = \frac{U_{\text{эф}}^2}{R_0}.$$

Таким образом, эффективная сила переменного тока равна силе такого постоянного тока, который имеет ту же мощность, что и данный переменный ток. Эффективный ток  $I_{\text{эф}}$  и постоянный ток  $I$  производят одинаковый внешний эффект, например, выделяют в проводнике одинаковое количество джоулева тепла.

Следует отметить, что полученные формулы выражают работу и мощность переменного тока на омическом (активном) сопротивлении  $R_0$ .

### Емкостное и индуктивное сопротивления цепи переменному току

В цепях постоянного тока конденсатор представляет собой бесконечно большое сопротивление: постоянный ток не проходит через диэлектрик, разделяющий обкладки конденсатора. При этом электрическая цепь как бы разрывается.

Цепи переменного тока конденсатор не разрывает: перезаряжаясь, он обеспечивает движение электрических зарядов, т.е. поддерживает переменный ток во внешней цепи. Из электромагнитной теории Максвелла следует, что переменный ток проводимости замыкается внутри конденсатора током смещения. Таким образом, для переменного тока конденсатор представляет собой конечное сопротивление, называемое емкостным сопротивлением.

Следовательно, для переменного тока проводник, помимо омического сопротивления, обладает емкостным сопротивлением.

Рассмотрим простейшую электрическую цепь, состоящую из источника переменного тока и конденсатора, включенного последовательно. Будем считать, что активное (омическое) сопротивление этой цепи мало (рис. 8.12).

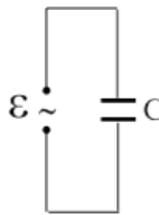


Рисунок 8.12

Пренебрегая падением напряжения на малом омическом сопротивлении подводящих проводов, будем считать, что напряжение на обкладках конденсатора равно приложенной ЭДС:

$$U_c = \varepsilon = U_m * \sin \omega t.$$

В любой момент времени заряд на конденсаторе

$$q = C U_c = C \varepsilon_m * \sin \omega t$$

Если за малый промежуток времени  $dt$  заряд конденсатора изменится на величину  $dq$ , то это означает, что в цепи существует ток  $I$ , равный

$$I = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU_c}{dt} = C \omega \varepsilon_m * \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = I_m * \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right),$$

где  $C \omega \varepsilon_m = I_m$  - амплитуда тока.

Выражение  $C \omega \varepsilon_m = I_m$ , переписанное в виде

$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{(\omega C)}, \quad (8.30)$$

является выражением закона Ома.

Величина

$$R_C = \left( \frac{1}{\omega C} \right), \quad (8.31)$$

играющая роль сопротивления, представляет собой сопротивление конденсатора для переменного тока, т.е. емкостное сопротивление.

Из формулы (8.31) видно, что емкостное сопротивление обратно пропорционально емкости конденсатора и циклической частоте тока. Это означает, что величина переменного тока  $I_m \sim \omega C$ .

Из сопоставления формул (8.31) и (8.30) видно, что изменения тока  $I$  и напряжения  $U_c$  совершаются в различных фазах: фаза тока на  $\frac{\pi}{2}$  больше фазы напряжения. Следовательно, на емкостном сопротивлении ток опережает напряжение на четверть периода (по времени), или на  $90^\circ$  (по фазе), что графически можно отобразить так, как показано на рис. 8.13.

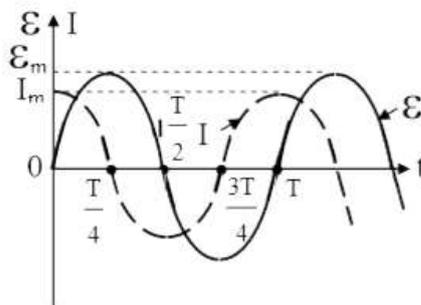


Рисунок 8.13 Графики изменения ЭДС и силы тока

Рассмотрим простейшую электрическую цепь, состоящую из источника переменного тока и катушки с индуктивностью  $L$ , включенной последовательно. Будем считать, что активное (омическое) сопротивление этой цепи мало (рис. 8.14).

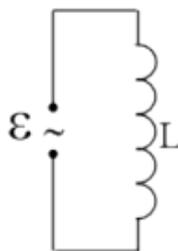


Рисунок 8.14

Пренебрегая падением напряжения на малом омическом сопротивлении подводящих проводов, будем считать, что напряжение на концах катушки равно приложенной ЭДС:

$$U_L = \varepsilon = U_m \cdot \sin \omega t \quad (8.32)$$

В этом случае на основании закона электромагнитной индукции в катушке появится ЭДС электромагнитной самоиндукции:

$$\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}. \quad (8.33)$$

Будем считать, что приложенное напряжение уравновешивается ЭДС самоиндукции (равно ей по величине):

$$\varepsilon = -\varepsilon_L.$$

Тогда, с учетом формул (8.33) и (8.32), можно записать

$$\begin{aligned} \varepsilon = U_L = L \frac{dI}{dt} &= LI_m \omega \cdot \cos \omega t = IL\omega = I_m L \omega \cdot \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= \varepsilon_m \cdot \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right), \end{aligned}$$

где

$$\varepsilon_m = I_m \omega L;$$

$$I = I_m \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right), \quad (8.34)$$

а

$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{\omega L} = \frac{\varepsilon_m}{R_L}. \quad (8.35)$$

Соотношение (8.35) является математической формой записи закона Ома. Из него видно, что индуктивное сопротивление равно

$$R_L = \omega L. \quad (9.32)$$

Таким образом, индуктивное сопротивление пропорционально частоте переменного тока и величине индуктивности.

Из сопоставления формул (8.32) и (8.34) видно, что изменения тока  $I$  и  $U_L$  совершаются в различных фазах, причем фаза тока на  $\frac{\pi}{2}$  меньше фазы напряжения. Это означает, что на индуктивном сопротивлении ток отстает от напряжения на четверть периода (по времени) или на 90° (по фазе) (рис. 8.15).

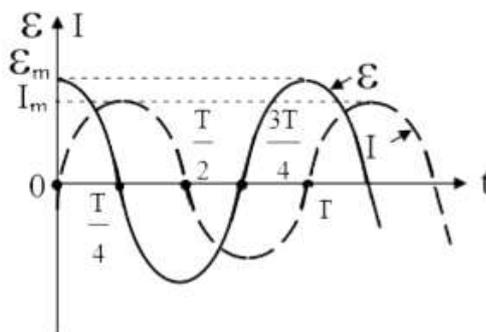


Рисунок 8.15

Сдвиг фаз обусловлен тормозящим действием ЭДС самоиндукции: она препятствует как нарастанию, так и убыванию тока в цепи.

Если в цепи переменного тока последовательно включены индуктивное и емкостное сопротивления, то напряжение на индуктивном сопротивлении будет опережать напряжение на емкостном сопротивлении на полпериода (по времени) или на 180° (по фазе).

Емкостное и индуктивное сопротивления носят название реактивного сопротивления. На реактивном сопротивлении электрическая энергия не расходуется. Этим реактивное сопротивление отличается от активного сопротивления. Связано это с тем, что энергия, периодически потребляемая на создание электрического поля в конденсаторе (во время его зарядки), в том же

количестве и с той же периодичностью возвращается в цепь во время разрядки конденсатора. Точно так же энергия, периодически потребляемая на создание магнитного поля катушки (во время возрастания тока), в том же количестве и с той же периодичностью возвращается в цепь во время убывания тока. Поэтому в технике переменного тока вместо реостатов (активного сопротивления), которые всегда нагреваются и бесполезно расходуют энергию, часто применяют дроссели (индуктивное сопротивление). Дроссель представляет собой катушку самоиндукции с железным сердечником. Оказывая значительное сопротивление переменному току, дроссель практически не нагревается и не расходует электроэнергии.

Надо отметить, что небольшие потери энергии имеют место и на реактивном сопротивлении. Они связаны с рассеянием энергии электрического поля конденсатора и магнитного поля катушки, с нагреванием диэлектрика в конденсаторе поляризационным током смещения, с выделением джоулева тепла на омическом сопротивлении катушки (поскольку любая катушка обладает некоторым активным сопротивлением).

### **Обобщенный закон Ома. Электрический резонанс. Коэффициент мощности электрической цепи**

Рассмотрим простую электрическую цепь, состоящую из последовательно соединенных омического  $R_0$ , емкостного  $R_C$  и индуктивного  $R_L$  сопротивлений (рис. 8.16).

При этом будем пользоваться методом векторных диаграмм, которым познакомились при изучении гармонических колебаний.

Векторная диаграмма амплитуды общего тока  $I_m$  и амплитуд напряжений на сопротивлении  $U_0$ , на конденсаторе  $U_C$  и на катушке  $U_L$  электрической схемы, представленной на рис. (8.16), изображена на рис. (8.17). Амплитуда внешней ЭДС  $\varepsilon_m$  должна равняться геометрической сумме этих напряжений. Выполняя геометрическое сложение, показано на рис. (8.17), для величины  $\varepsilon_m$  получим

$$\varepsilon_m = \sqrt{U_0^2 + (U_L - U_C)^2}, \quad (8.36)$$

где

$$\begin{cases} U_0 = I_m R_0 \\ U_L = I_m R_L = I_m \omega L; \\ U_C = I_m R_C = I_m \frac{1}{\omega C} \end{cases} \quad (8.37)$$

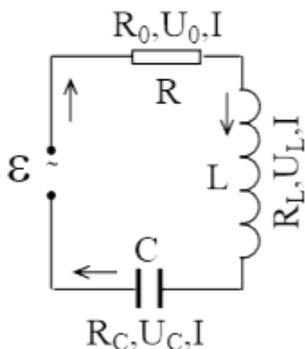


Рисунок 8.16

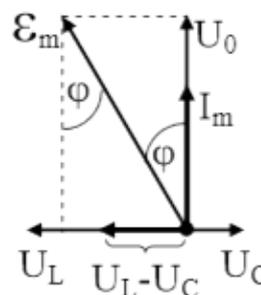


Рисунок 8.17

С учетом выражений (8.37) уравнение (8.36) можно переписать в виде

$$\varepsilon_m = \sqrt{(I_m R_0)^2 + (I_m R_L - I_m R_C)^2} = I_m \sqrt{R_0^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

откуда

$$I_m = \frac{\varepsilon_{\text{эф}}}{\sqrt{R_0^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (8.38)$$

Поделив обе части равенства (8.38) на  $\sqrt{2}$ , получим соотношение для эффективных значений тока и ЭДС:

$$I_{\text{эф}} = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R_0^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (8.39)$$

Формулы (8.38) и (8.39) являются математической формой записи обобщенного закона Ома для цепи переменного тока.

Из рис. 8.17 видно, ЭДС  $\varepsilon_m$  и  $I_m$  ток сдвинуты друг относительно друга по фазе на угол  $\phi$ . При этом

$$\tan \phi = \frac{U_L - U_C}{U_0} = \frac{R_L - R_C}{R_0} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R_0}.$$

Таким образом, величина и направление сдвига фаз зависят от соотношения между величинами сопротивлений. Если  $R_L = R_C$ , то ЭДС опережает ток. Если  $R_L = R_C$ , то ЭДС отстает от тока. Если же  $R_L = R_C$ , то фазы ЭДС и тока совпадают, т.е. сдвиг фаз  $\phi=0$ . В этом случае при

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad (8.40)$$

в цепи наступает так называемый электрический резонанс (резонанс напряжений). Выражение (9.39) выражает условие электрического резонанса. Полное сопротивление цепи в этом случае наименьшее и равно только омическому сопротивлению, а ток в цепи будет максимальным и равным

$$I_{\text{эф}} = \frac{\varepsilon_{\text{эф}}}{R_0}.$$

Следовательно, при электрическом резонансе (резонансе напряжений) в цепи, состоящей из последовательно соединенных омического, емкостного и индуктивного сопротивлений, полное сопротивление цепи минимально, а ток максимален и совпадает по фазе с приложенной ЭДС.

Величина

$$R = \sqrt{R_0^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

представляет собой полное сопротивление цепи переменного тока, которое называют импедансом и обозначают  $Z$ :

$$Z = \sqrt{R_0^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

В случае распространения в пространстве электромагнитного поля вводятся в рассмотрение различные виды импедансов.

Надо отметить, что в цепи, состоящей из параллельно соединенных омического, емкостного и индуктивного сопротивлений (рис. 8.18), тоже наступает электрический резонанс при частоте, определяемой соотношением (8.40). Однако в этом случае в проводах, подводящих напряжение, ток будет иметь минимальное значение. Такой электрический резонанс называют резонансом токов.

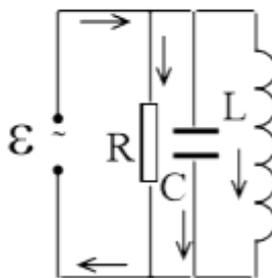


Рисунок 8.18

Согласно условию (8.40), электрический резонанс наступает при круговой частоте

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

или при частоте

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Эта частота называется резонансной частотой электрической цепи. Известно, что средняя мощность, выделяемая переменным током на активном сопротивлении,

$$P = I_{\text{эф}} U_{\text{эф}}.$$

Если в цепи имеется реактивное сопротивление, то сдвиг фаз  $\phi$ , возникающий между током и напряжением, ведет к некоторому снижению мощности, выделяемой в цепи. В этом случае выражение для средней мощности имеет вид

$$P = I_{\text{эф}} U_{\text{эф}} * \cos \phi \tag{8.41}$$

Множитель в выражении (8.41) называется коэффициентом мощности. Максимальное значение, равное единице,  $\cos \phi$  имеет при отсутствии сдвига фаз между током и напряжением, т.е. при электрическом резонансе. В этом случае выделяемая мощность в цепи переменного тока максимальна и определяется по формуле

$$P = I_{\text{эф}} U_{\text{эф}}.$$

Следовательно, для повышения мощности, отдаваемой переменным током в цепь, необходимо выполнять условия, при которых коэффициент мощности стремится к максимальному значению. Это условие достигается путем включения в цепи переменного тока определённых индуктивных и емкостных нагрузок, сочетание которых соответствует резонансу электрической цепи.

Увеличение коэффициента мощности электрических цепей переменного тока является одной из важнейших народно – хозяйственных задач в области электроэнергетики.

### **Вихревые электрические токи (токи Фуко)**

Вихревые электрические токи (токи Фуко) – это замкнутые электрические токи в массивном проводнике, возникающие при изменении

пронизывающего его магнитного потока. Или вихревые электрические токи – это индукционные токи, возникающие в массивных проводниках, находящихся в переменном магнитном поле. Токи Фуко иногда играют полезную роль, а иногда вредную.

Электрическое сопротивление массивных проводников мало, поэтому токи Фуко могут достигать больших значений.

В соответствии с правилом Ленца токи Фуко выбирают внутри проводника такие пути и направления, чтобы своим действием противодействовать причине, которая их порождает. В связи с этим движущиеся в магнитных полях проводники испытывают торможение, обусловленное взаимодействием токов Фуко с магнитным полем. Это используется для создания демпфирующих (ускоряющих или замедляющих движение проводников) устройств подвижных частей электроизмерительных и других приборов. На подвижной части прибора укрепляется проводящая пластина (рис.8.19), которая вводится в зазор между полюсами постоянного магнита. При движении такой пластины в магнитном поле в ней возникают токи Фуко, вызывающие торможение подвижной системы прибора. Преимущество такого устройства состоит в том, что торможение возникает лишь при движении пластинки и исчезает, когда пластинка неподвижна. Поэтому такой успокоитель не препятствует точному приходу подвижной системы прибора в положение равновесия.

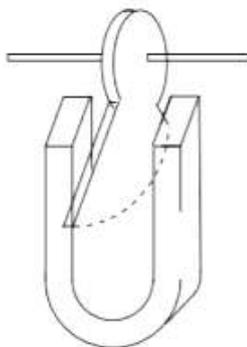


Рисунок 8.19

Формулу для оценки (определения) вихревых токов в проводниках можно получить, воспользовавшись

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

Поток магнитной индукции  $\Phi$ , пронизывающий некоторый замкнутый контур площадью  $S$ , находящийся в проводнике, равен

$$\Phi = BS.$$

Так как индукция магнитного поля изменяется с частотой, равной частоте переменного тока, то для ЭДС электромагнитной индукции (самоиндукции), которая может достигать больших значений, будем иметь

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -S \frac{dB}{dt}.$$

С учетом того что сопротивление проводников мало, величина вихревых токов будет равна

$$I = -\frac{S}{R} \frac{dB}{dt}.$$

Из рассмотренного выше видно, что вихревые токи (токи Фуко):

- 1) образуют в пространстве вокруг себя мощные магнитные поля;
- 2) в проводниках выделяется большое количества тепла в единицу времени:

$$Q = 0,24I^2R = \frac{0,24S^2}{R} \left(\frac{dB}{dt}\right)^2.$$

Все это приводит к крайне вредному явлению, ведущему к рассеянию энергии, и поэтому при конструировании различных технических устройств (генераторов переменного тока, двигателей переменного тока, трансформаторов) применяют специальные меры к предупреждению возникновения вихревых токов. Все массивные части электротехнических устройств изготавливают из отдельных изолированных полос, расположенных так, чтобы в них не возникали вихревые токи (чтобы возможные направления токов Фуко были перпендикулярны изолированным пластинам). Появление ферритов (магнитных материалов с большим электрическим сопротивлением) сделало возможным изготовление сердечников электротехнических устройств сплошными.

Однако тепловое действие токов Фуко иногда бывает полезным и используется в так называемых индукционных печах, нашедших широкое применение в термической обработке различных металлов и сплавов, а также при получении материалов высокой чистоты в металлургии.

### Скин-эффект

Известно, что токи Фуко, возникающие в проводниках, по которым текут переменные электрические токи, направлены так, что ослабляют токи внутри проводников и усиливают их вблизи поверхности.

В результате быстропеременный ток оказывается неравномерно распределенным по сечению проводника – он как бы вытесняется к поверхности проводника. Это явление получило название скин-эффекта или поверхностного эффекта. В результате наличия скин-эффекта у поверхности проводника плотность тока  $j$  максимальна, а внутри его  $j$  убывает и достигает наименьшего значения на оси проводника.

Напряженность электрического поля ведет себя внутри проводника аналогичным образом, так плотность тока и напряженность электрического поля, в силу закона Ома, пропорциональны друг другу

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}.$$

Чтобы доказать справедливость данных рассуждений, рассмотрим узкий контур в плоскости осевого сечения проводника (рис. 8.20). Циркуляция вектора напряженности электрического поля по замкнутому контуру (т.е. ЭДС индукции) отлична от нуля, так как контур пронизывается переменным магнитным потоком, создаваемым током проводника. При этом вектор  $E_2$  меньше вектора  $E_1$ , так как поле на оси проводника минимально. Оценить глубину проникновения (толщину скин-слоя), т.е. расстояние, на котором плотность тока во много раз меньше, чем на поверхности, можно следующим образом.

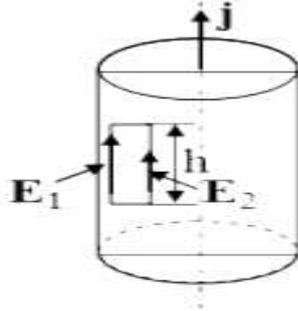


Рисунок 8.20

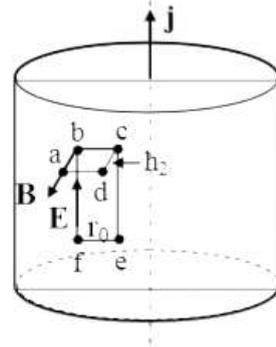


Рисунок 8.21

Рассмотрим два прямоугольных контура плоскости, которых нормальны друг другу (рис. 8.21). Один из них, «bcef», лежит в осевом сечении, высота его  $h_1$ , а ширина равна глубине проникновения  $r_0$  (толщина скин-слоя). Циркуляция вектора напряженности электрического поля по этому контуру равна

$$\oint_{bcef} \mathbf{E}_\ell \cdot d\ell = Eh_1$$

поскольку поле на стороне «се» почти равно нулю, а на двух других сторонах контура вектор напряженности электрического поля перпендикулярен к перемещению.

На основании закона электромагнитной индукции эта циркуляция вектора напряженности электрического поля численно равна скорости изменения магнитного потока, пронизывающего контур:

$$\oint_{bcef} \mathbf{E}_\ell \cdot d\ell = \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| = Eh_1 \quad (8.42)$$

Магнитный поток, пронизывающий этот контур,

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \sim \frac{\Phi}{T} \sim \Phi\omega \sim \mu\mu_0 H r_0 h_1 \omega, \quad (8.43)$$

где  $\omega$  - частота переменного тока.

Решая уравнения (8.42) и (8.43) для напряженности электрического поля, будем иметь

$$E \approx \mu\mu_0 \omega r_0 H \quad (8.44)$$

Циркуляция вектора напряженности магнитного поля по замкнутому контуру «abcd» равна

$$\oint_{abcd} \mathbf{H}_\ell \cdot d\ell = Hh_2$$

поскольку магнитное поле на внутренней стороне «cd» равно нулю.

Согласно закону полного тока,

$$\oint_{abcd} \mathbf{H}_\ell \cdot d\ell = I,$$

где  $I \sim jh_2 r_0$  полный ток, находящийся внутри замкнутого контура.

Имеем

$$Hh_2 \sim jh_2 r_0 = \gamma E h_2 r_0$$

т.е.

$$H \sim \gamma r_0 E$$

или

$$E \sim \frac{H}{\gamma r_0} \quad (8.45)$$

Из уравнений (8.44) и (8.45) для толщины скин-слоя будем иметь

$$r_0 \sim \frac{1}{\sqrt{\mu \mu_0 \omega}}$$

Более строгая теория дает формулу для определения толщины скин-слоя, имеющую следующий вид:

$$r_0 = \sqrt{\frac{2}{\sigma \mu \mu_0 \omega}}$$

Оценка толщины скин-слоя приводит к следующему результату. Если по проводнику течет ток, частота которого равна 107 Гц, то толщина скин-слоя составляет порядок равный 10<sup>-4</sup> м.

Из рассмотренного видно, что при больших частотах нет надобности в проводниках большого сечения, так как ток в них будет существовать только в поверхностном слое. Поверхностный слой будет при этом сильно нагреваться, в то время как остальная часть проводника (при кратковременном пропускании тока) остается холодной. На этом основан метод поверхностной закалки изделий, изготовленных из различных сталей. При этом если поверхность изделий упрочняется при закалке, то внутренняя часть его остается незакаленной, т.е. вязкой, и вся деталь оказывается стойкой как по отношению к износу поверхности, так и по отношению к ударным нагрузкам.

Существование скин-эффекта означает, что электромагнитная волна, попадающая на поверхность проводника (металла, электролита или плазмы), быстро затухает, проникая лишь на глубину, равную скин-слою. Таким образом, скин-эффект характерен не только для переменных токов, но и для электромагнитных полей.

Магнитный скин-эффект заключается в неравномерном распределении магнитного потока по сечению проводника.

### Вопросы для контроля знаний

1. Релятивистское преобразование электромагнитных полей, зарядов и токов.
2. Электрическое поле в различных системах отсчёта.
3. Магнитное поле в различных системах отсчёта.
4. Электромагнитное поле в различных системах отсчёта.
5. Доказательство инвариантности электрического заряда.
6. Инвариантность уравнений Максвелла относительно преобразований Лоренца.
7. Квазистационарное электромагнитное поле.
8. Квазистационарные электрические токи.
9. Работа и мощность переменного электрического тока.
10. Емкостное и индуктивное сопротивления цепи переменному току.
11. Обобщенный закон Ома.
12. Электрический резонанс.
13. Коэффициент мощности электрической цепи.
14. Вихревые электрические токи (токи Фуко).
15. Скин-эффект.

## Глава 9. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ В РАЗЛИЧНЫХ СРЕДАХ

### 9.1 Распространение электромагнитной волны в изотропной диэлектрической среде

Реакция диэлектрической среды на электромагнитную волну состоит в смещении электрических зарядов атомов, что приводит к возникновению макроскопической поляризации среды  $P$ . Поляризацию можно также описать вектором электростатической индукции  $D = E + 4\pi P$ , где,  $P = \alpha E$ . В изотропной среде связь вектора  $D$  с электрическим полем волны  $E$  имеет вид

$$D = \varepsilon E,$$

где диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha.$$

Полученное соотношение означает, что в изотропной среде  $D \parallel E$ .

В диэлектрической среде свободные заряды отсутствуют,  $\rho = 0$  и плотность тока проводимости равна нулю:  $j = 0$ . Уравнение Максвелла в диэлектрической среде имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E + \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} &= 0; & \operatorname{div} D &= 0; \\ \operatorname{rot} B - \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} &= 0; & \operatorname{div} B &= 0; \end{aligned} \quad (9.1)$$

Рассмотрим распространение плоской электромагнитной волны в изотропной среде. Для плоской волны

$$\begin{aligned} E &= E_0 e^{i(\omega t - kr)}; \\ B &= B_0 e^{i(\omega t - kr)}; \\ D &= D_0 e^{i(\omega t - kr)}. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Вычислим входящие в уравнения (9.1) производные по времени:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \{E_0 e^{i(\omega t - kr)}\} = i\omega E; \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \{B_0 e^{i(\omega t - kr)}\} = i\omega B; \\ \frac{\partial D}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \{D_0 e^{i(\omega t - kr)}\} = i\omega D. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Видим, что дифференцирование по времени для плоской волны эквивалентно умножению на  $i\omega$ .

Рассмотрим операцию дивергенции вектора  $D$  из (9.2):

$$\operatorname{div} D = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}, \quad (9.4)$$

где

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \{D_0 e^{i(\omega t - kr)}\} = ik_x D_x,$$

$$\frac{\partial D_y}{\partial y} = ik_y D_y \text{ и } \frac{\partial D_z}{\partial z} = ik_z D_z.$$

Подставив эти производные в (9.4), получим

$$\operatorname{div} D = -i(kD). \quad (9.5)$$

Аналогичное рассмотрение дает

$$\operatorname{div} B = -i(kB). \quad (9.6)$$

Видим, что операция дивергенции эквивалентна скалярному умножению на  $-ik$ .  
С учетом (9.5) и (9.6) третье и четвертое уравнения Максвелла из (9.3) принимают вид

$$\begin{aligned} (\mathbf{kD}) &\equiv \mathbf{D}_{\parallel} = \mathbf{0}; \\ (\mathbf{kB}) &\equiv \mathbf{B}_{\parallel} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (9.7)$$

где  $\mathbf{D}_{\parallel}$  и  $\mathbf{B}_{\parallel}$  - параллельные продольные составляющие векторов  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$ , соответственно.

Входящую в (9.1) операцию ротора рассмотрим на примере плоской волны  $\mathbf{E}$  из (9.2). Согласно определению ротора, его  $x$  - составляющая

$$(\text{rot}\mathbf{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}.$$

Подставим сюда  $E_y$  и  $E_z$  из (9.3):

$$(\text{rot}\mathbf{E})_x = -ik_y E_z + ik_z E_y. \quad (9.8)$$

Аналогично для  $y$  и  $z$  - составляющих ротора имеем

$$(\text{rot}\mathbf{E})_y = -ik_z E_x + ik_x E_z; \quad (9.9)$$

$$(\text{rot}\mathbf{E})_z = -ik_x E_y + ik_y E_x. \quad (9.10)$$

Объединив эти уравнения в векторное уравнение, получим

$$\text{rot}\mathbf{E} = -i[\mathbf{k} \times \mathbf{E}]. \quad (9.11)$$

Операция ротора сводится к векторному произведению  $(-i\mathbf{k})$  на  $\mathbf{E}$ . Аналогично

$$\text{rot}\mathbf{B} = -i[\mathbf{k} \times \mathbf{B}]. \quad (9.12)$$

Используя уравнения (9.3), (9.11) и (9.12), запишем два уравнения Максвелла из (9.1) в виде

$$\frac{c}{\omega} = [\mathbf{k} \times \mathbf{B}] = -\mathbf{D}; \quad (9.13)$$

$$\frac{c}{\omega} = [\mathbf{k} \times \mathbf{E}] = \mathbf{B};$$

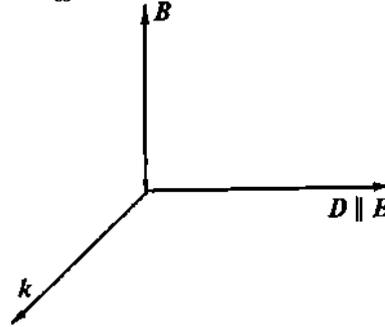


Рисунок 9.1

Из уравнения (9.8) следует, что вектор  $\mathbf{D}$  перпендикулярен векторам  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{B}$ . Уравнение (9.9) означает, что вектор  $\mathbf{B}$  перпендикулярен векторам  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{E}$ . Три вектора  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{k}$  составляют правовинтовую систему ортогональных векторов, показанную на рис. 9.1. Для решения системы уравнений (9.8) удобно подставить вектор  $\mathbf{B}$  из второго уравнения (9.13) в первое уравнение (9.13):

$$\frac{c^2}{\omega^2} = [\mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \mathbf{E}]] = -\mathbf{D}.$$

Раскроем двойное векторное произведение в этом уравнении:

$$\frac{c^2}{\omega^2} = \{k(kE) - k^2E\} = -D. \quad (9.14)$$

Определим единичный вектор волновой нормали  $s = \frac{k}{k}$ , направленный по волновому вектору  $k$ .  
Для волны в среде

$$k = \frac{\omega}{v_{\text{фаз}}} s = \frac{\omega}{c} ns,$$

где  $v_{\text{фаз}} = \frac{c}{n}$  - фазовая скорость фронта идущей в направлении к электромагнитной волны;  $n$  - показатель преломления среды. Подстановка  $k$  в (9.14) дает

$$n^2\{s(sE) - E\} = -D. \quad (9.15)$$

Подставив в это выражение  $D = \varepsilon E$ , получим линейную систему уравнений для определения поля  $E$ . Уравнение (9.15) называют дисперсионным уравнением. Для плоской электромагнитной волны ( $sE) = 0$ , и уравнение (9.15) сводится к виду

$$(n^2 - \varepsilon)E = 0.$$

Поскольку  $E \neq 0$ , то отсюда

$$n^2 = \varepsilon. \quad (9.16)$$

Фазовая скорость волны

$$v_{\text{фаз}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{c}{n}.$$

Эта скорость меньше скорости света в вакууме в  $n = \sqrt{\varepsilon}$  раз.

Еще одна важная характеристика электромагнитной волны – это вектор Умова-Пойнтинга  $P = \frac{c}{4\pi} [E \times B]$ , определяющий направление распространения энергии электромагнитной волны. Вектор  $P$  перпендикулярен векторам  $E$  и  $B$  и поэтому направлен по волновому вектору  $k$ . Направление распространения энергии электромагнитной волны – это направление светового луча в оптике. В изотропной среде световой луч направлен по волновому вектору.

## 9.2. Распространение электромагнитной волны в анизотропной среде

Кристаллы являются анизотропными средами, свойства которых зависят от направления в пространстве. На рис. 9.2,а изображен слоистый кристалл, в котором направление  $Oz$  не эквивалентно направлениям  $Ox$  и  $Oy$ . В таком кристалле возникающая под действием поля  $E$  поляризация  $P$  оказывается разной по различным направлениям. При этом зависимость  $D = \varepsilon E$  заменяется более общими соотношениями:

$$\begin{aligned} D_x &= \varepsilon_{xx}E_x + \varepsilon_{xy}E_y + \varepsilon_{xz}E_z; \\ D_y &= \varepsilon_{yx}E_x + \varepsilon_{yy}E_y + \varepsilon_{yz}E_z; \\ D_z &= \varepsilon_{zx}E_x + \varepsilon_{zy}E_y + \varepsilon_{zz}E_z. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Диэлектрическая проницаемость среды здесь представлена матрицей которую называют тензором диэлектрической проницаемости анизотропной среды. Отклик среды на электромагнитную волну описывается девятью величинами  $\varepsilon_{ik}$ , где  $i, k=x, y, z$ .

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}, \quad (9.18)$$

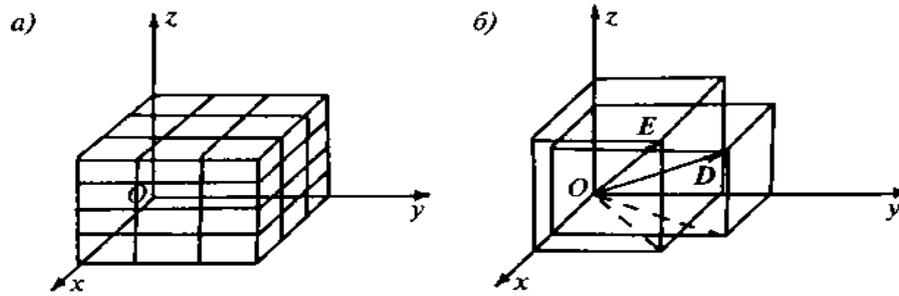


Рисунок 9.12

В частном случае, если поле  $E$  направлено по оси  $Ox$ ,  $E = (E_x, 0, 0)$ , соотношения (9.17) сводятся к более простым:

$$\begin{aligned} D_x &= \varepsilon_{xx}E_x; \\ D_y &= \varepsilon_{yx}E_x; \\ D_z &= \varepsilon_{zx}E_x. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Эти соотношения означают, что под действием поля  $E_x$  поляризация среды возникает не только вдоль направления  $Ox$ , но и по направлениям  $Oy$  и  $Oz$ . У вектора электрической индукции при этом оказываются отличными от нуля все три компоненты  $D_x, D_y, D_z$ . Следовательно, в анизотропной среде вектор  $D$  не совпадает по направлению с вектором  $E$  (см. рис. 9.2,6).

Для каждого тензора существуют главные оси координат, в которых он имеет диагональный вид

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}, \quad (9.19)$$

где  $\varepsilon_x \neq \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$  главные значения тензора  $\varepsilon$ .

В главных осях материальные уравнения (9.17) принимают вид

$$\begin{aligned} D_x &= \varepsilon_x E_x; \\ D_y &= \varepsilon_y E_y; \\ D_z &= \varepsilon_z E_z. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Из (9.20) также следует, что направления векторов  $D$  и  $E$  (см. рис. 9.2,6) различны.

Распространение плоской электромагнитной волны в анизотропной среде определяется уравнениями Максвелла (9.13). Из этих уравнений по-прежнему следует, что векторы  $D, B$  и  $k$  составляют правовинтовую систему, изображенную на рис. 9.3. Из второго уравнения (9.13) следует, что  $B \perp E$ , т. е. вектор  $E$  лежит в плоскости  $kOD$ , но вектор  $E$  теперь направлен не по вектору  $D$  и составляет с ним угол  $\alpha$ . Можно сказать, что в анизотропной среде электромагнитная волна поперечна по  $B$  и  $D$ . Условие поперечности для  $E$  не выполняется. Из-за этого вектор Умова-Пойнтинга  $P$ , определяющий направление распространения энергии и перпендикулярный  $E$ , составляет угол  $\alpha$  с направлением распространения волны  $k$  (рис. 9.4).

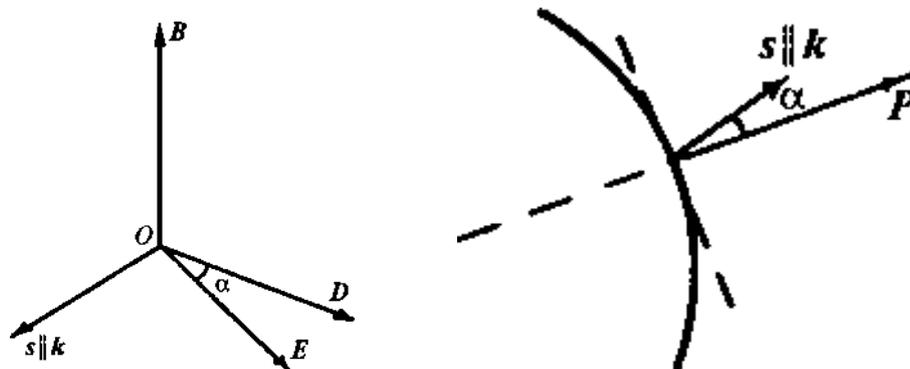


Рисунок 9.4

Подставляя  $P$  из материальных уравнений (9.20) в уравнение (9.15), получим систему уравнений для определения поля  $E$ . Характер решений этих уравнений существенно зависит от симметрии того кристалла, в котором распространяется волна. По оптическим свойствам кристаллы делятся на три группы.

1. Кристаллы с симметрией куба или тетраэдра, в которых можно выделить три взаимно перпендикулярных, физически эквивалентных направления. Эти три направления служат главными осями тензора диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{ik}$ . Примерами подобных кристаллов могут служить кристаллы  $NaCl$  или  $GaAs$ . Для таких кристаллов три главных значения тензора  $\epsilon$  оказываются равными:  $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \epsilon$ . Материальное уравнение (9.20) сводится к

$$D = \epsilon E$$

Оптические свойства таких кристаллов те же, что и у изотропной среды, рассмотренной в разделе 9.1.

2. Существуют кристаллы, в которых можно выделить только два физически эквивалентных направления. Свойства в третьем направлении оказываются другими. Такие кристаллы обладают симметрией вращения относительно этого третьего, выделенного направления, называемого оптической осью кристалла. Сам кристалл называют одноосным. Такими являются, например, кристаллы гексагональной симметрии  $ZnS, CdSe$ . Гексагональной симметрией обладает шестигранная призма, изображенная на рис. 9.5. При вращении вокруг оси  $Oz$  на угол  $60^\circ$  призма совмещается сама с собой. Направления  $Ox$  и  $Oy$  являются физически эквивалентными:  $\epsilon_x = \epsilon_y$ .

Тензор  $\epsilon$  в главных осях одноосного кристалла принимает вид

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix}, \quad (9.21)$$

и материальные уравнения (9.20) дают

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_x E_x; \\ D_y &= \epsilon_y E_y; \\ D_z &= \epsilon_z E_z. \end{aligned} \quad (9.22)$$

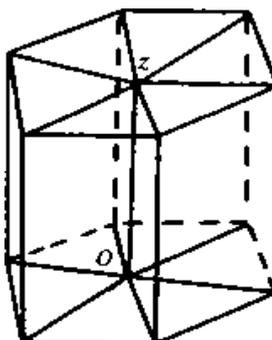


Рисунок 9.5

Электрическое поле  $E$  определяют из уравнений (9.15) и из материальных уравнений (9.22).

Для решения уравнений (9.22) удобно определить плоскость, проходящую через оптическую ось и вектор волновой нормали  $s$ . Эта плоскость называется главной плоскостью кристалла. Тогда векторы  $E$  и  $D$  можно представить в виде суммы двух составляющих, одна из которых перпендикулярна главной плоскости:  $E_1$  и  $D_1$ , а другая лежит в этой плоскости:  $E_2$  и  $D_2$ . Пусть оптическая ось направлена по  $Oz$ , и главная плоскость является плоскостью  $xOz$ . (рис. 9.6).

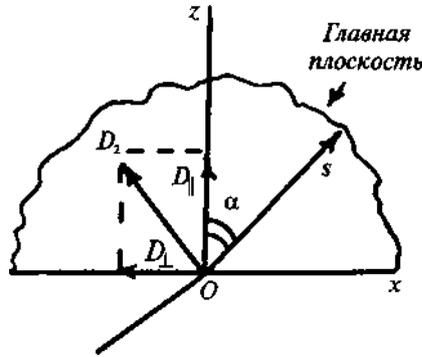


Рисунок 9.6

Рассмотрим сначала вектор  $D_1$  перпендикулярный главной плоскости, а значит, и перпендикулярный оси  $Oz$ . Материальное уравнение (9.20) для этой компоненты имеет вид

$$D_1 = \varepsilon_x E_1 \quad (9.23)$$

Это такое же уравнение, что и для изотропной среды. Подстановка (9.23) в (9.15) дает, как и для изотропной среды, фазовую скорость

$$v_{\text{фаз}} = v_0 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_x}} = \frac{c}{n_0}. \quad (9.24)$$

Таким образом, плоская волна, перпендикулярная главной плоскости, распространяется с фазовой скоростью, которая не зависит от направления распространения волны относительно оптической оси. Такая волна называется обыкновенной. Согласно (9.24), показатель преломления обыкновенной волны

$$n_0 = \sqrt{\varepsilon_x}. \quad (9.25)$$

Рассмотрим теперь вектор  $D_2$ , лежащий в главной плоскости кристалла. Вектор  $D_2$  имеет две компоненты: одну – перпендикулярную оптической оси,  $D_{\perp}$ , и другую – параллельную оптической оси,  $D_{\parallel}$ , (рис. 9.6). Материальные уравнения (9.20) для этих компонент имеют вид

$$\begin{aligned} D_{\perp} = D_x i + D_y j &= \varepsilon_x (E_x i + E_y j) = \varepsilon_x D_{\perp}; \\ D_{\parallel} = D_z k &= \varepsilon_z E_z k = \varepsilon_z D_{\parallel} \end{aligned} \quad (9.26)$$

На рис. 9.3 показано, что векторы  $D$ ,  $E$  и  $s$  лежат в одной плоскости, перпендикулярной вектору  $B$ . Поэтому можно разложить вектор  $E$  на две составляющие, одна из которых направлена по волновой нормали  $s$ , а другая – по  $D$ :

$$E = E_s + E_D.$$

Подставим  $E$  из этого уравнения в уравнение Максвелла (9.13). Поскольку для плоской волны  $[k \times E_s] = 0$ , то во второй уравнении (8.13) остается только  $E_D$ , и оно сводится к

$$\frac{c}{\omega} = [k \times E_D] = B.$$

Эта же компонента остается и в уравнении (9.15):

$$n^2\{s(sE_D) - E_D\} = -D. \quad (9.27)$$

Для определения фазовой скорости этой волны до множим (9.27) скалярно на  $\mathbf{D}$  и учтем, что  $(sD) = 0$ :

$$\left(\frac{c}{v_{\text{фаз}}}\right)^2 (E_D D) = D^2 \quad (9.28)$$

Найдем связь  $D$  с  $E_D$ , для чего воспользуемся скалярным произведением

$$(ED) = E_D D = E_x D_x + E_y D_y + E_z D_z,$$

которое с помощью (9.26) запишем в виде

$$E_D D = E_{\perp} D_{\perp} + E_{\parallel} D_{\parallel}. \quad (9.29)$$

Подставляя сюда  $E_{\perp}$  и  $E_{\parallel}$  из (9.26), получим

$$E_D = \frac{1}{D} \left( \frac{D_{\perp}^2}{\varepsilon_x} + \frac{D_{\parallel}^2}{\varepsilon_z} \right). \quad (9.30)$$

Согласно рис. 8.6,

$$D_{\perp} = D \cos \alpha, D_{\parallel} = D \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  - угол между оптической осью  $Oz$  и волновой нормалью  $s$ . Можно записать соотношение (9.30) в виде

$$D = \varepsilon_{eff} E_D,$$

где

$$\varepsilon_{eff} = \left( \frac{\cos^2 \alpha}{\varepsilon_x} + \frac{\sin^2 \alpha}{\varepsilon_z} \right)^{-1}.$$

Подставив это  $D$  в (9.28), получим

$$\left( \frac{c^2}{v_{\text{фаз}}^2} - \varepsilon_{eff} \right) E_D^2 = 0.$$

Поскольку  $E_D \neq 0$ , отсюда фазовая скорость

$$v_{\text{фаз}}^2 = v_e^2 = \frac{c^2}{\varepsilon_{eff}} = c^2 \left( \frac{\cos^2 \alpha}{\varepsilon_x} + \frac{\sin^2 \alpha}{\varepsilon_z} \right). \quad (9.31)$$

Фазовая скорость волны с вектором  $D_2$ , лежащим в главной плоскости кристалла, зависит от угла  $\alpha$  между оптической осью и волновой нормалью. Эта волна называется необыкновенной, показатель ее преломления

$$n_e = \frac{c}{v_{\text{фаз}}} = \left( \frac{\cos^2 \alpha}{\varepsilon_x} + \frac{\sin^2 \alpha}{\varepsilon_z} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (9.32)$$

Если  $\alpha = 90^\circ$ , то  $n_e = \sqrt{\varepsilon_z}$  и необыкновенная волна идет перпендикулярно оптической оси с фазовой скоростью  $v_e = v_{\text{фаз}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_z}}$ . При  $\alpha = 0^\circ$  необыкновенная волна распространяется вдоль оптической оси с фазовой скоростью  $v_e = v_{\text{фаз}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_x}}$ . Эта скорость совпадает с фазовой скоростью обыкновенной волны  $v_0$  из (9.24).

Подставляя два найденных значения фазовой скорости в линейное дисперсионное уравнение (9.15), можно для каждого из них найти отношение  $E_x:E_y:E_z$ . Поскольку в уравнении все коэффициенты – вещественные величины, между этими компонентами электромагнитного поля нет сдвига по фазе. Поэтому линейно поляризованная падающая волна остается в среде линейно поляризованной волной.

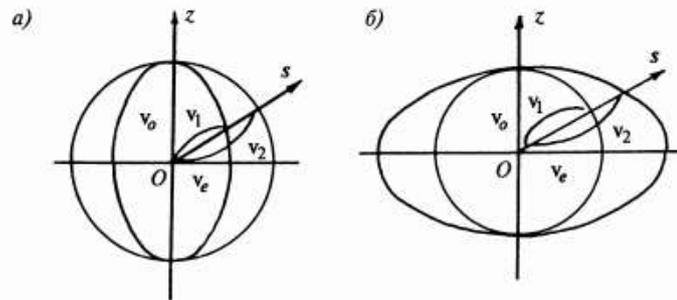


Рисунок 9.7

Итак, в анизотропной среде в любом направлении распространяются две плоские волны, линейно поляризованные в двух взаимно перпендикулярных направлениях и обладающие разными фазовыми скоростями. Поверхность постоянного волнового фронта этих двух волн (поверхность постоянной фазы) является сферой для обыкновенной волны и оваломидом для необыкновенной волны. Взаимное расположение поверхностей постоянной фазы зависит от соотношения фазовых скоростей  $v_o$  и  $v_e$ .

Одноосные кристаллы  $v_o > v_e$  называют положительными. Примером такого кристалла является кварц. Волновые фронты для обеих волн показаны на рис. 9.7,а. При  $v_o < v_e$  одноосные кристаллы называют отрицательными. Примером является исландский шпат ( $\text{CaCO}_3$ ). Волновые фронты для обеих волн изображены на рис. 9.7,б. В обоих случаях при распространении вдоль оптической оси фазовые скорости этих волн совпадают и равны  $v_o$ . Для произвольного направления волновой нормали  $s$  имеются две волны с фазовыми скоростями  $v_o$  и  $v_e$ , показанными на рис. 9.7. При этом обыкновенная волна поляризована перпендикулярно оптической оси, а необыкновенная – в плоскости, проходящей через оптическую ось  $Oz$  и волновую нормаль  $s$ .

3. Имеется большая группа материалов, в которых нет даже двух физически эквивалентных направлений. Диэлектрическая проницаемость таких материалов в главных осях имеет вид тензора

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

с тремя различными главными значениями на диагонали ее,  $\varepsilon_x \neq \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$ . Примером подобного материала является слюда. Такие материалы называют двухосными: в них обе волны необыкновенные. Волновые поверхности двухосных кристаллов могут даже само пересекаться. Примеры таких волновых поверхностей представлены на рис. 9.8.

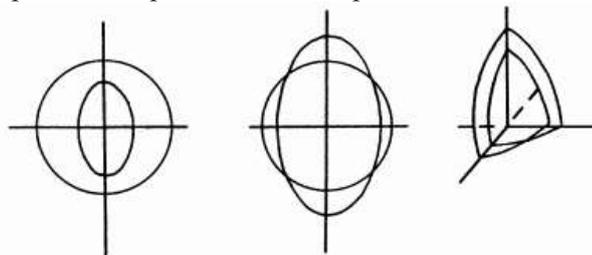


Рисунок 9.8

### 9.3 Явление двойного лучепреломления

Законы распространения плоской волны в одноосном кристалле позволяют понять природу явления двойного лучепреломления на границе двух сред.

Волна, падающая на кристалл из воздуха (из изотропной среды), частично отражается и разделяется внутри одноосного кристалла на две преломленные линейно поляризованные волны: обыкновенную и необыкновенную. Для обеих волн справедливы законы преломления и отражения Снеллиуса. Применительно к кристаллу законы Снеллиуса относятся к волновым нормальям, а не к световым лучам. Волновые нормали отраженной и обеих преломленных волн лежат в плоскости падения, и направления распространения обеих волн (направления волновых нормалей  $s$ ) подчиняются законам Снеллиуса:

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_d} = n_0, \quad \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_d} = n_e$$

Здесь  $\theta_i$  - угол падения;  $\theta_d$  и  $\theta_d$  - угол преломления обыкновенной и необыкновенной волн,  $n$  задается уравнением (9.32) и зависит от угла  $\alpha$  между оптической осью и волновой нормалью. Обыкновенный луч, направление которого совпадает с направлением волновой нормали  $s$ , лежит в плоскости падения, а необыкновенный луч может выходить из этой плоскости (рис. 9.9).

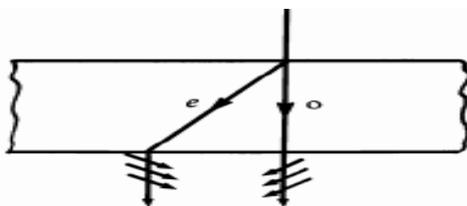


Рисунок 9.9

Явление двойного лучепреломления было открыто Бертолинусом в кристаллах исландского шпата. У исландского шпата сильно различаются показатели преломления обыкновенного и необыкновенного лучей:  $n_o = 1,658$  и  $n_e = 1,486$ . Поскольку  $n_o > n_e$ , то соотношение между фазовыми скоростями  $V_o < V_e$  соответствует отрицательному кристаллу. Обыкновенная и необыкновенная волны поляризованы во взаимно перпендикулярных направлениях, поэтому одноосные кристаллы широко используются для получения поляризованного света.

Поляризационная призма была изготовлена из исландского шпата еще в первой половине XIX века Николеом. Эту призму так и называют - николю. Сечение николя главной плоскостью кристалла изображено на рис. 9.10. Направление оптической оси составляет  $64^\circ$  с нижним основанием призмы. Призма разрезана по диагонали на две части, которые затем склеены канадским бальзамом. Показатель преломления канадского бальзама лежит в интервале между  $n_o$  и  $n_e$  для исландского шпата,  $n_e < n_{\text{канад.бальзам}} < n_o$  ( $n_{\text{канад.бальзам}} = 1,500$ ). Углы призмы подобраны так, что необыкновенный луч проходит через прослойку канадского бальзама и выходит наружу, а обыкновенный испытывает полное отражение от этой прослойки и уходит вниз. Вышедший из призмы необыкновенный луч оказывается при этом линейно поляризованным. Поляризованный свет можно также получать в Двойкопреломляющих призмах, в которых различие между  $n_e$  и  $n_o$ , используется для разделения лучей с разной поляризацией. Двойкопреломляющая призма изготавливается из исландского шпата и стекла (рис. 8.11). Обыкновенный луч преломляется в шпате и в стекле дважды и сильно отклоняется от линейно поляризованного необыкновенного луча, который выходит наружу.

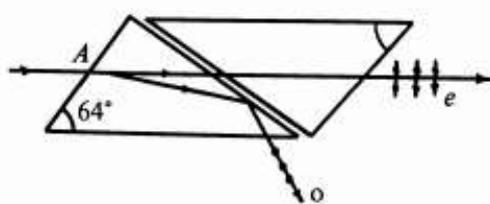


Рисунок 9.10

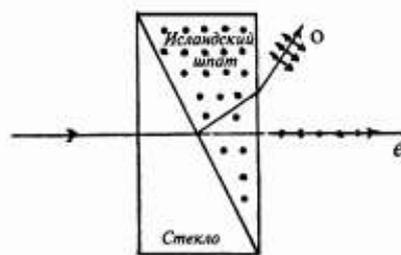


Рисунок 9.11

Имеется еще одно оптическое устройство, в котором используется не только различие  $n_e$  и  $n_o$ , но и тот факт, что обыкновенный луч поглощается в кристалле значительно сильнее обыкновенного. Таким свойством обладает кристалл турмалина. Прошедший через турмалиновую пластинку свет оказывается частично поляризованным. Различие в величинах поглощения обыкновенного и необыкновенного лучей зависит от длины волны падающего света. Возникает зависимость окраски кристалла от направления распространения света. Это явление носит название дихроизма (двухцветности). Пластинку турмалина называют дихроичной пластинкой.

Поляризаторы используются не только для получения, но и для обнаружения линейно поляризованного света. Луч света пропускают через поляризатор, и если при вращении поляризатора вокруг направления луча интенсивность прошедшего света при некоторых положениях обращается в нуль, то исследуемый свет линейно поляризован. При любой другой поляризации (эллиптической, круговой и др.) полного гашения не возникает.

#### 9.4 Получение эллиптического и циркулярно поляризованного света

Рассматривая вопрос о поляризации электромагнитных волн, мы установили, что в результате сложения двух когерентных волн, поляризованных в двух взаимно перпендикулярных направлениях, имеющих разные амплитуды и обладающих некоторой разностью фаз, можно получить волны и с эллиптической, и с линейной, и с круговой поляризацией.

Рассмотренные в разделе 9.2 одноосные кристаллы можно использовать для получения нужной разности фаз между двумя интерферирующими волнами. Получение разных поляризаций реализуется следующим образом. Монохроматический свет проходит через николю N и становится линейно поляризованным, как показано на рис. 9.12,а. Далее на пути световой волны ставится кристаллическая пластинка из одноосного кристалла, вырезанная параллельно оптической оси. Через пластинку с разными скоростями распространяются две волны. Обыкновенная волна поляризована перпендикулярно оптической оси (направление ВВ' на диаграмме рис. 9.12,б). Необыкновенная волна поляризована вдоль оптической оси (направление СС' на диаграмме рис.9.12,б).

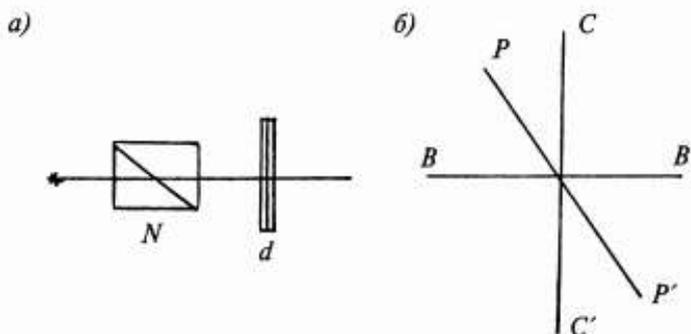


Рисунок 9.12

Если направление вектора  $E$  падающей на пластинку линейно поляризованной волны составляет угол с оптической осью кристалла, то амплитуды колебаний необыкновенной и обыкновенной волн равны  $a = A \cos \alpha$  и  $b = A \sin \alpha$ , соответственно, где  $A$  – амплитуда поля падающей волны. Пройдя через пластинку толщиной  $d$ , эти две волны приобретают разность хода  $(n_o - n_e)d$ , а соответствующая разность фаз равна

$$\Delta\varphi = 2\pi/\lambda(n_o - n_e)d.$$

Таким образом, после прохождения света через пластинку получается волна, концы векторов  $E$  и  $B$  которой описывают эллипсы, их главные оси составляют угол  $\alpha$  с оптической осью пластинки. Это волна эллиптической поляризации.

Можно подобрать толщину пластинки так, чтобы дополнительная разность хода двух перпендикулярно поляризованных волн составляла четверть длины волны

$$(n_o - n_e)d = \lambda/4.$$

Такая пластинка называется пластинкой в четверть длины волны. Соответствующая разность фаз двух волн равна  $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ . При этом траектория конца вектора  $\mathbf{E}$  является эллипсом, ориентированным относительно главных осей пластинки. Длина полуосей эллипса зависит от угла  $\alpha$ . В частности, при  $\alpha = 45^\circ$  эллипс переходит в круг, и результирующая волна является поляризованной по кругу. Заметим, что обычно пользуются толстыми пластинками, дающими разность хода  $(m + \frac{1}{4})\lambda$ , где  $m = 1, 2, \dots$

В зависимости от того, положительным или отрицательным является кристалл, пластинка в четверть волны создает разность фаз  $\Delta\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ . Компонента поля  $\mathbf{E}$  по оси  $Ox$  может либо опережать, либо отставать по фазе от компоненты по оси  $Oy$ . В соответствии с этим результирующий вектор  $\mathbf{E}$  вращается против часовой стрелки (влево) или по часовой стрелке (вправо), соответственно. Поэтому принято различать левую и правую эллиптическую и круговую поляризации.

Если толщина пластинки подобрана так, что разность хода двух волн в ней составляет половину длины волны

$$(n_o - n_e)d = 1/2 \lambda$$

то соответствующая разность фаз этих волн равна  $\Delta\varphi = \pi$ . В этом случае эллипс вырождается в прямую  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ , т.е. свет остается линейно поляризованным, но направление колебаний переходит при этом из 1-3-го квадрантов ( $NN'$ ) во 2-4-й квадранты ( $MM'$ ) после поворота на угол  $(180^\circ - 2\alpha)$ , как это показано на рис. 9.13, б.

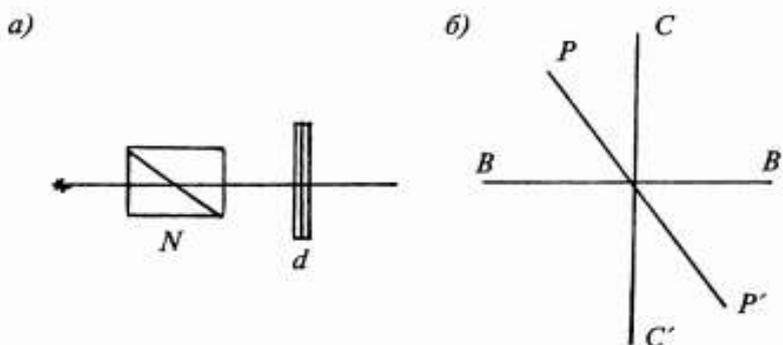


Рисунок 9.13

Пластинка в целую длину волны

$$(n_o - n_e)d = \lambda$$

даёт разность фаз

$$\Delta\varphi = 2\pi$$

Эллипс при этом снова вырождается в прямую. Поляризация остается линейной. Эти же пластинки в четверть, половину и целую длину волны ( $\frac{\lambda}{4}$ ,  $\frac{\lambda}{2}$  и  $\lambda$ ) позволяют анализировать свет неизвестной поляризации. Обнаружение эллиптического и циркулярно поляризованного света связано с некоторыми трудностями. Одной простой поляризационной призмой, например, николем, это сделать невозможно. Через поставленный на пути исследуемого света поляризатор проходит только его часть, соответствующая пропускаемым призмой колебаниям. Амплитуда прошедшего света  $A$  зависит от ориентации главной плоскости поляризатора ( $NN'$ ) по отношению к осям эллипса (рис. 8.19). Повороту николя соответствует поворот прямоугольника со стороны  $2A$ . Максимальная амплитуда прошедшего света получается при  $A=b$ , т.е. когда плоскость ( $NN'$ ) совпадает с большой осью эллипса. Минимальная амплитуда возникает при  $A=a$ , когда плоскость ( $NN'$ ) параллельна малой оси эллипса. Поэтому при вращении поляризатора происходит просветление или затемнение поля. Картина похожа на частично поляризованный свет. В частном случае, когда свет поляризован по кругу, т.е. когда  $a=b$ , вращение николя не меняет интенсивности прошедшего света. Картина та же, что при исследовании естественного света.

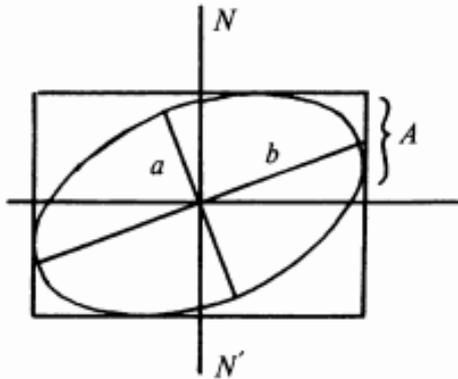


Рисунок 9.14

Для однозначной идентификации эллиптической или циркулярной поляризации света необходимо превратить этот свет в линейно поляризованный, поставив на пути волны соответствующим образом подобранную пластинку одноосного кристалла. Для выявления эллиптической поляризации волны нужна пластинка в четверть длины волны, ориентированная так, чтобы главные оси пластинки совпали с главными осями эллипса. Пластинка создает дополнительную разность фаз  $\pm\pi/2$  между компонентами поля **E**, направленными по главным осям эллипса. Дополнительная разность фаз компенсирует первоначальную разность фаз между компонентами поля **E**. Исследуемый свет превращается в плоско поляризованный, который легко идентифицируется николем.

Для анализа света круговой поляризации пластинку в четверть длины волны можно ориентировать произвольным образом.

Для полного количественного анализа эллиптически поляризованного света нужно определить разность фаз двух взаимно перпендикулярных колебаний для произвольного направления распространения световой волны. Другими словами - нужно найти форму и расположение эллипса по отношению к любому направлению распространения световой волны. Для этого пользуются приборами, которые могут скомпенсировать любую разность фаз. Такие приборы называются компенсаторами.

Рассмотрим работу компенсатора бабине, состоящего из двух кварцевых клиньев, вырезанных так, что их оптические оси перпендикулярны друг другу (рис.9.15) Для эллиптически поляризованного света, прошедшего через такой компенсатор, возникает разность фаз обыкновенной и необыкновенной волн, зависящая от толщины клиньев. Пусть толщина первого клина равна  $d_1$ . Тогда дополнительная разность хода колебаний, параллельных и перпендикулярных плоскости рисунка, равна

$$(n_e d_1 + n_o d_2) - (n_o d_1 + n_e d_2) = (n_e - n_o) (d_1 - d_2)$$

В компенсаторе из положительного кристалла, где  $n_e > n_o$ , свет, проходящий по пути, где  $d_1 > d_2$ , приобретает добавочную разность хода двух волн по отношению к пути, где  $d_1 = d_2$ . Если же свет проходит по пути, где  $d_1 < d_2$ , то разность хода двух волн уменьшается. В компенсаторе есть пути, проходя по которым, волны дополняют первоначальную разность фаз до  $0, 2\pi, 4\pi$  и т.д. и превращают эллиптический свет в линейно поляризованный. Такие пути расположены компенсаторе на равном расстоянии друг от друга. Если за компенсатором поставить николю, то за ним возникает ряд темных равноотстоящих полос, параллельных ребру компенсатора. Зная толщину клиньев, можно рассчитать добавочную разность фаз и определить по ней первоначальную разность фаз анализируемого эллиптически поляризованного света.

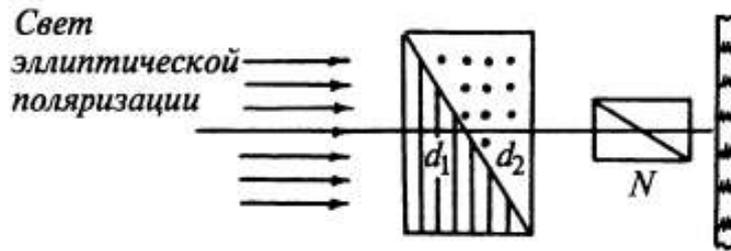


Рисунок 9.15

### 9.5 Искусственная анизотропия

Большинство оптически изотропных сред обладает изотропией, появляющейся в результате хаотического расположения анизотропных молекул вещества. Приложив внешнее воздействие, можно ориентировать молекулы и создать в кристалле искусственную анизотропию. Такое ориентирующее действие оказывает и одноосное давление, и внешнее электрическое или магнитное поля.

1. Анизотропия, возникающая при деформации кристалла это эффект Зеебека. При одноосном сжатии по оси  $MM'$ , показанной на рис.9.16, это направление становится оптической осью кристалла. Показатели преломления  $n_e$  и  $n_o$  для двух колебаний, происходящих по направлению  $MM'$  и перпендикулярно к нему, не равны. Опыт показывает, что разность  $(n_o - n_e)$ , являющаяся мерой наведенной анизотропии, пропорциональна величине давления  $p$ :

$$n_o - n_e = \alpha p,$$

где  $\alpha$  – коэффициент пропорциональности. Отсюда

$$p = \frac{F}{S} = \frac{F}{lh}.$$

Разность хода, приобретаемая волнами после прохождения слоя вещества толщиной  $l$ , равна

$$\delta = l(n_o - n_e) = \alpha pl.$$

Соответствующий сдвиг фазы

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = Cpl,$$

где  $C = \frac{\alpha}{\lambda}$  – константа, характеризующая вещество.

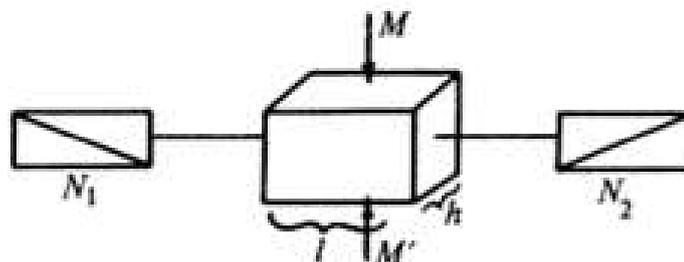


Рисунок 9.16

Разность показателей преломления может быть и положительной, и отрицательной в зависимости от свойств материала. Кроме того, она зависит от длины света  $\lambda$ . Поэтому при наблюдении в белом свете тело с искусственно наведенной анизотропией при скрещенных поляризаторах оказывается окрашенным. Регистрация искусственной анизотропии является весьма чувствительным методом наблюдения напряжений, возникающих под давлением в прозрачных телах.

2. Еще один пример искусственной анизотропии - это двойное лучепреломление в электрическом поле, так называемый эффект Керра. Керр установил экспериментально, что жидкости под действием электрического поля становятся оптически анизотропными. Они ведут себя как

одноосные двоякопреломляющие кристаллы, оптическая ось которых параллельна приложенному полю  $\mathbf{E}_0$ . На рис. 9.17 показана схема установки для наблюдения эффекта Керра. Между скрещенными николями помещен плоский конденсатор, заполненный исследуемым веществом. В отсутствие внешнего поля  $\mathbf{E}_0$  свет через систему не проходит. При наличии внешнего электрического поля  $\mathbf{E}_0$  возникает двойное лучепреломление в исследуемом веществе. Свет после конденсатора становится эллиптически поляризованным. Он частично проходит через николю  $N_2$ . Его можно исследовать с помощью, например, конденсатора Бабиня.

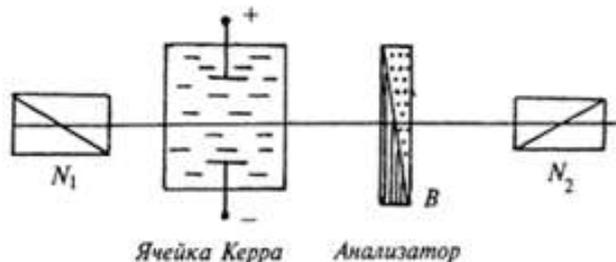


Рисунок 9.17

Эксперимент показывает, что для данной длины волны  $\lambda$  разность  $n_e - n_o$  пропорциональна квадрату напряженности поля  $\mathbf{E}_0$ :

$$n_e - n_o = kE_0^2,$$

где  $k$ -размерный коэффициент пропорциональности.

Разность хода необыкновенной и обыкновенной волн, приобретаемая на пути  $l$ , составляет

$$\delta = l(n_e - n_o) = kE_0^2 l,$$

а соответствующая разность фаз

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = 2\pi V l E_0^2$$

где  $V = \frac{k}{\lambda}$  – постоянная Керра. Она зависит от длины волны и уменьшается с повышением температуры. Для большинства веществ  $n_e > n_o$ , и постоянная Керра положительна,  $V > 0$ . Это соответствует положительному кристаллу.

С микроскопической точки зрения эффект Керра объясняется анизотропией молекул, из которых состоит исследуемое вещество. Электрическое поле электромагнитной волны  $\mathbf{E}$  поляризует молекулы. Например, анизотропная молекула кислорода  $O_2$  под действием поля  $\mathbf{E}$  становится диполем. В обычных условиях молекулы ориентированы хаотически. Среда оказывается оптически изотропной. Внешнее постоянное поле  $\mathbf{E}_0$  ориентирует молекулы, выстраивая их дипольные моменты по полю  $\mathbf{E}_0$ . Одно из направлений в среде оказывается направлением большей поляризации. Анизотропная макроскопическая поляризация такой среды имеет вид

$$\mathbf{P} = \tilde{\alpha} \mathbf{E}_0,$$

где  $\tilde{\alpha}$ - тензор диэлектрической восприимчивости среды.

Максимальный показатель преломления имеет волна с полем  $\mathbf{E}$ , параллельным направлению максимальной поляризации, т.е с  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{E}_0$ . Так как поле  $\mathbf{E}_0$  играет роль оптической оси, то скорость распространения плоской волны зависит от ориентации ее электрического вектора  $\mathbf{E}$  относительно  $\mathbf{E}_0$ . При векторе  $\mathbf{E}$ , параллельном  $\mathbf{E}_0$ , это необыкновенная волна с  $n_e > n_o$  и  $V > 0$ .

Молекулы некоторых веществ, например этилового эфира, обладают собственным дипольным моментом  $\mathbf{d}_0$ , направление которого может и не совпадать с направлением наибольшей поляризуемости молекул. Эти постоянные дипольные моменты ориентируются вдоль поля  $\mathbf{E}_0$ , определяющего направление оптической оси, а направление наибольшей поляризуемости составляет некоторый угол с  $\mathbf{E}_0$ . Если направление максимальной поляризации перпендикулярно направлению постоянного момента, то при этом постоянная Керра может принимать и отрицательные значения,  $V < 0$ .

Эффект Керра наблюдается и в переменном электрическом поле. В высокочастотном поле  $E_0$  молекула с собственным дипольным моментом  $d_0$  вследствие своей инерционности не успевает переориентировать свой дипольный момент и следовать за полем  $E_0$ . Постоянный дипольный момент  $d_0$  перестает вносить вклад в значение  $V$ . Наведенный полем электромагнитной волны дополнительной дипольный момент образуется за счет деформации электронных оболочек атомов или молекул. Электроны легкие, и наведенный дипольный момент  $d$  успевает каждый раз ориентироваться по полю  $E_0$ . В нитробензоле значение  $V$  уменьшается в 100 раз за счет перехода от постоянного поля  $E_0$  к полю со световой частотой.

Эффект Керра имеет важные применения в науке и технике, связанные с практической безынерционностью этого явления. Поляризуемость электронных оболочек изменяется практически мгновенно вслед за изменением поля  $E_0$ . Ячейка Керра может служить фотографическим затвором, работающим с временем экспозиции  $\sim 10^{-12}$  с. Ею можно пользоваться также для амплитудной модуляции интенсивности света.

## 9.6 Отражение и преломление света на границе двух диэлектриков

Уравнения Максвелла были записаны нами для однородных областей пространства, в которых физические свойства среды меняются непрерывно. Иная ситуация возникает на границе раздела двух сред, где эти свойства меняются резко. На границе двух диэлектриков, в которых отсутствуют и плотность свободных зарядов ( $\rho = 0$ ), и плотность токов проводимости ( $j=0$ ), тангенциальные составляющие  $E_t$  и  $H_t$  непрерывны в любой момент времени и в любой точке на границе:

$$E_{t1}=E_{t2}; H_{t1}=H_{t2} \quad (9.33)$$

Экспериментальные исследования показывают, что на границе раздела происходят отражение и преломление световой волны. Рассмотрим законы отражения и преломления света с позиций уравнений Максвелла. Для этого проанализируем распространение плоской волны

$$E^{(i)}(r, t) = E_0^{(i)} e^{i(\omega t - (k \cdot r))} \quad (9.34)$$

Падающей из среды 1 на плоскую границу раздела двух однородных и изотропных диэлектриков (рис.9.18). На границе эта волна разделяется на отраженную волну

$$E^{(r)}(r, t) = E_0^{(r)} e^{i(\omega t - (k \cdot r))} \quad (9.35)$$

Которая также распространяется в среде 1, и на преломленную волну

$$E^{(d)}(r, t) = E_0^{(d)} e^{i(\omega t - (k \cdot r))} \quad (9.35)$$

Которая имеется в среде 2.

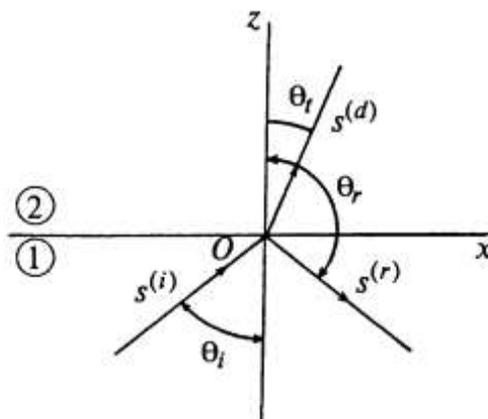


Рисунок 9.18

Перейдем к рассмотрению амплитуд отраженной и преломленной волн. Они определяются поляризацией падающей волны. Разложим поле падающей волны  $E$  на компоненты  $E_{||}$  и  $E_{\perp}$ , лежащие

в плоскости падения и перпендикулярно к ней, соответственно. Поляризации этих волн показаны на рис. 9.19.

1. Пусть вектор  $E^{(i)} \equiv E_{\parallel}^{(i)}$  лежит в плоскости падения (см. рис.9.16,а). Вектор  $H^{(i)}$  направлен при этом по нормали к плоскости рисунка наружу. Граничные условия (9.33) с учетом соотношений  $H = \sqrt{\epsilon}E$  и  $n = \sqrt{\epsilon}$  запишем в виде

$$E_{\parallel}^{(i)} \cos\theta_i + E_{\parallel}^{(r)} \cos\theta_r = E_{\parallel}^{(d)} \cos\theta_d;$$

$$E_{\parallel}^{(i)} n_1 + E_{\parallel}^{(r)} n_1 = E_{\parallel}^{(d)} n_1. \quad (9.36)$$

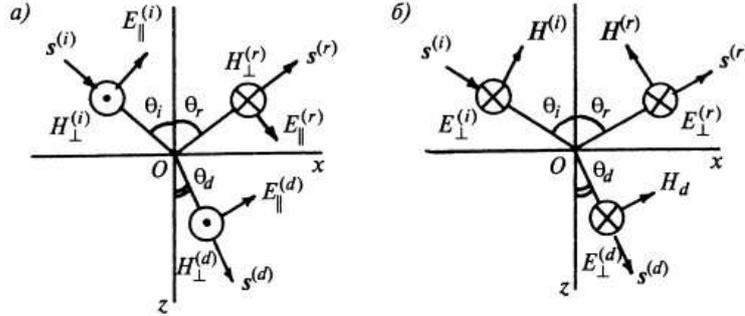


Рисунок 9.19

Домножая первое уравнение на  $n_2$ , а второе – на  $\cos\theta_d$ , исключим  $E_{\parallel}^{(d)}$  из этих уравнений и найдем отношение

$$\frac{E_{\parallel}^{(r)}}{E_{\parallel}^{(i)}} = \frac{n_2 \cos\theta_i - n_1 \cos\theta_d}{n_2 \cos\theta_r + n_1 \cos\theta_d}.$$

Используя закон преломления и тригонометрическое соотношение  $\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}$ , получим амплитудный коэффициент отражения

$$r_{\parallel} = \frac{E_{\parallel}^{(r)}}{E_{\parallel}^{(i)}} = -\frac{\cos(\theta_i + \theta_d) \sin(\theta_i - \theta_d)}{\sin(\theta_i + \theta_d) \cos(\theta_i - \theta_d)} = \frac{tg(\theta_d - \theta_i)}{tg(\theta_i + \theta_d)}. \quad (9.37)$$

Аналогично, домножив первое уравнение (9.36) на  $n_1$ , а второе – на  $\cos\theta_i$ , найдем:

$$n_1 \cos\theta_i E_{\parallel}^{(i)} + n_1 \cos\theta_i E_{\parallel}^{(r)} = n_1 \cos\theta_d E_{\parallel}^{(d)};$$

$$n_1 \cos\theta_i E_{\parallel}^{(i)} - n_1 \cos\theta_i E_{\parallel}^{(r)} = n_2 \cos\theta_i E_{\parallel}^{(d)};$$

Складывая эти уравнения, получим амплитудный коэффициент пропускания (прозрачность)  $t_{\parallel}$

$$t_{\parallel} = \frac{E_{\parallel}^{(d)}}{E_{\parallel}^{(i)}} = \frac{2 \cos\theta_i}{\cos\theta_d + \frac{n_2}{n_1} \cos\theta_i}.$$

Используя закон отражения и тригонометрические преобразования, вычислим

$$t_{\parallel} = \frac{E_{\parallel}^{(d)}}{E_{\parallel}^{(i)}} = \frac{2 \sin\theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_d) \cos(\theta_i - \theta_d)}. \quad (9.38)$$

2. Рассмотрим вторую возможную поляризацию падающей волны, при которой вектор  $E^{(i)}$  перпендикулярен плоскости падения,  $E^{(i)} \equiv E_{\perp}^{(i)}$  (см. рис.9.19,б). Вектор  $H^{(i)}$  при этом лежит в плоскости падения. Граничные условия в этом случае имеет вид

$$E_{\perp}^{(i)} + E_{\perp}^{(r)} = E_{\perp}^{(d)};$$

$$n_1 E_{\perp}^{(i)} \cos \theta_i - n_1 E_{\perp}^{(r)} \cos \theta_r = n_2 E_{\perp}^{(d)} \cos \theta_d. \quad (9.39)$$

Исключив из этой системы уравнений  $E_{\perp}^{(d)}$ , найдем амплитудный коэффициент отражения  $r_{\perp}$  в этой поляризации:

$$r_{\perp} = \frac{E_{\perp}^{(r)}}{E_{\perp}^{(i)}} = \frac{n_2 \cos \theta_d - n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_d + n_1 \cos \theta_i}. \quad (9.40)$$

Подставляя закон преломления и выполняя тригонометрические преобразования, найдем

$$r_{\perp} = \frac{E_{\perp}^{(r)}}{E_{\perp}^{(i)}} = \frac{\sin \theta_i \cos \theta_d - \cos \theta_i \sin \theta_d}{\sin \theta_i \cos \theta_d} = \frac{\sin(\theta_d - \theta_i)}{\sin(\theta_i + \theta_d)}. \quad (9.41)$$

Исключив из (9.39)  $E_{\perp}^{(r)}$ , имеем

$$n_1 E_{\perp}^{(i)} \cos \theta_i - n_1 E_{\perp}^{(r)} \cos \theta_i = n_1 E_{\perp}^{(d)} \cos \theta_i;$$

$$n_1 E_{\perp}^{(i)} \cos \theta_i - n_1 E_{\perp}^{(r)} \cos \theta_i = n_2 E_{\perp}^{(d)} \cos \theta_i;$$

Суммируя эти два уравнения, найдем *амплитудный коэффициент пропускания* в этой поляризации

$$t_{\perp} = \frac{E_{\perp}^{(d)}}{E_{\perp}^{(i)}} = \frac{2 \sin \theta_d \cos \theta_i}{\sin \theta_d \cos \theta_i + \cos \theta_i \sin \theta_d} = \frac{2 \sin \theta_d \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_d)}. \quad (9.42)$$

Выражения для амплитудных коэффициентов (9.38), (9.39) и (9.42) носят название *формулы Френеля*. Аналогичные соотношения можно получить и для вектора  $\mathbf{H}$ .

Амплитудные коэффициенты – вещественные величины. Это означает, что фазы отраженной и преломленной волн либо совпадают с фазой падающей волны, либо имеют фазу, сдвинутую относительно падающей волны на  $\pi$ . Фаза преломленной волны  $E^{(d)}$  для обеих поляризаций совпадает с фазой падающей волны  $E^{(i)}$ .

Таблица 7

Соотношение показателей преломления	$(\theta_i + \theta_d) < \frac{\pi}{2}$	$(\theta_i + \theta_d) > \frac{\pi}{2}$
$n_2 > n_1$ ( $\theta_i > \theta_d$ )	$E_{\parallel}^{(r)}$ и $E_{\parallel}^{(i)}$ противоположны по знаку (и по фазе), $E_{\perp}^{(r)}$ и $E_{\perp}^{(i)}$ противоположны по знаку (по фазе)	$E_{\parallel}^{(r)}$ и $E_{\parallel}^{(i)}$ совпадают по знаку (и по фазе), $E_{\perp}^{(r)}$ и $E_{\perp}^{(i)}$ противоположны по знаку (и по фазе)
$n_2 < n_1$ ( $\theta_i > \theta_d$ )	$E_{\parallel}^{(r)}$ и $E_{\parallel}^{(i)}$ совпадают по знаку (и по фазе), $E_{\perp}^{(r)}$ и $E_{\perp}^{(i)}$ совпадают по знаку (и по фазе),	$E_{\parallel}^{(r)}$ и $E_{\parallel}^{(i)}$ противоположны по знаку (и по фазе), $E_{\perp}^{(r)}$ и $E_{\perp}^{(i)}$ совпадают по знаку (и по фазе)

Сложнее обстоит дело с отраженной волной. Возможные соотношения фаз отраженной и падающей волн представлены в табл. 7.

Из данных таблицы видно, что при малых углах падения, таких что  $(\theta_i + \theta_d) < \frac{\pi}{2}$ , фазы обеих компонент электрического вектора отраженной волны противоположны фазе падающей волны при  $n_2 > n_1$  и совпадают по фазе с падающей волной при  $n_2 < n_1$ . Это и есть явление *потери полуволны при отражении от оптически более плотной среды*, которое мы учитывали в главе 6 при рассмотрении интерференции в пленке и при обсуждении колец Ньютона.

## 9.7 Коэффициенты отражения и пропускания.

### Полное внутреннее отражение

Интенсивность светового пучка определяется энергией, которую переносит волна, т.е. проекцией вектора Умова\_Пойнтинга на нормаль к границе раздела

$$P = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\epsilon} E^2 = \frac{c}{4\pi} n E^2. \quad (9.43)$$

Интенсивности падающей, отраженной и преломленной волн равны, соответственно,

$$J_i = P_i \cos \theta_i = \frac{c}{4\pi} n_1 |E_i|^2 \cos \theta_i;$$

$$J_r = P_r \cos \theta_i = \frac{c}{4\pi} n_1 |E_r|^2 \cos \theta_i;$$

$$J_d = P_d \cos \theta_d = \frac{c}{4\pi} n_2 |E_d|^2 \cos \theta_d.$$

Коэффициентом отражения  $R$  называют отношение отраженного потока к падающему  $R = J_r/J_i$ . Коэффициенты отражения для двух рассматриваемых выше поляризаций равны

$$R_{\parallel} = |r_{\parallel}|^2 = \frac{\operatorname{tg}^2(\theta_i - \theta_d)}{\operatorname{tg}(\theta_i + \theta_d)};$$

$$R_{\perp} = |r_{\perp}|^2 = \frac{\sin^2(\theta_i - \theta_d)}{\sin^2(\theta_i + \theta_d)}. \quad (9.44)$$

Коэффициент пропускания  $T$  определяется отношением преломленного потока к падающему  $T = J_d/J_i$ :

$$T_{\parallel} = |t_{\parallel}|^2 = \frac{\sin^2 2\theta_i \sin^2 2\theta_d}{\sin^2(\theta_i + \theta_d) \cos^2(\theta_i - \theta_d)};$$

$$T_{\perp} = |t_{\perp}|^2 = \frac{\sin^2 2\theta_i \sin^2 2\theta_d}{\sin^2(\theta_i + \theta_d)}. \quad (9.45)$$

Можно проверить, что в соответствии с законом сохранения энергий

$$R + T = 1.$$

Исследуем зависимость  $R_{\parallel}$  и  $R_{\perp}$  от угла падения  $\theta_i$ .

1. Нормальное падение:  $\theta_i = \theta_d = 0$ .

Из уравнений (9.44) и (9.45) следует, что исчезает разница между волнами, поляризованными в плоскости падения и перпендикулярно к ней. При  $n_2 > n_1$  фазы  $E_{\parallel}$  и  $E_{\perp}$  отличаются на  $\pi$ . Если же  $n_2 < n_1$ , то фазы  $E_{\parallel}$  и  $E_{\perp}$  одинаковы. В этом случае коэффициент отражения

$$R = \left( \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2. \quad (9.46)$$

На границе стекло ( $n_2=1,5$ ) – воздух ( $n_1=1,0$ ) коэффициент отражения

$$R = \frac{1}{25} = 4\%.$$

Отсюда следует, что отраженная волна имеет малую интенсивность по отношению к падающей волне.

2. Скользящее падение:  $\theta_i = 90^\circ$ .

Из уравнений (9.44) следует, что коэффициент отражения

$$\begin{aligned} R_{\perp} &= |r_{\perp}|^2 = 1; \\ R_{\parallel} &= |r_{\parallel}|^2 = 1; \end{aligned} \quad (9.47)$$

Происходит полное отражение волн обеих поляризаций от границы раздела.

3. Падение под углом:  $\theta_i + \theta_d = \frac{\pi}{2}$ ;

При этом стоящий в знаменателе  $|r_{\parallel}|^2$  в уравнении (9.44)  $\text{tg}(\theta_i + \theta_d) \rightarrow \infty$  и  $|r_{\parallel}|^2 = 0$ . Отраженного света с параллельной поляризацией нет. Найдем угол падения, при котором отраженная волна с параллельной поляризацией исчезает. Для угла падения имеем в рассматриваемом случае

$$\theta_d = \frac{\pi}{2} - \theta_i$$

Отсюда

$$\sin \theta_d = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta_i \right) = \cos \theta_i. \quad (9.48)$$

Подставляя (9.48) в закон преломления Снеллиуса (9.45), получим

$$\frac{\sin \theta_i}{\cos \theta_i} = \frac{n_2}{n_1}$$

или

$$\text{tg} \theta_i^{(\text{Бр})} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (9.49)$$

Это соотношение отражает закон *Брюстера*, а угол  $\theta_i^{\text{Бр}}$ , определяемый этим соотношением, называют углом *полной поляризации*, или *углом Брюстера*. Если свет падает под углом  $\theta_i^{\text{Бр}}$  на границу раздела, то электрический вектор отраженной волны плоско поляризован перпендикулярно плоскости падения (рис.9.20). На рисунке точками и черточками показаны направления колебаний вектора  $\mathbf{E}$ .

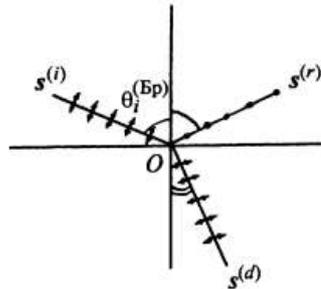


Рисунок 9.20

Для оптических длин волн показатель преломления воды равен 1,33 и угол Брюстера составляет  $53^\circ$ . В радиодиапазоне значение показателя преломления воды достигает 9,0 и угол Брюстера равен  $84^\circ$ .

На законе Брюстера основан один из методов получения поляризованного света. Недостаток этого метода состоит в том, что доля света, отраженного под углом Брюстера, мала.

Пусть световая волна падает из оптически более плотной среды (стекло) в оптически менее плотную среду (воздух). При этом

$n_2 < n_1$ . Из закона Снеллиуса (9.45)

$$\sin \theta_d = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i \quad (9.50)$$

следует, что угол  $\theta_d$  имеет вещественные значения только при условии, что угол  $\theta_i$  остается меньшим порогового значения  $\tilde{\theta}_i$  определяемого соотношением

$$\sin \tilde{\theta}_i = \frac{n_2}{n_1}. \quad (9.51)$$

Отсюда видно, что при  $\theta_i = \tilde{\theta}_i$   $\sin \theta_d = 1$  и угол преломления  $\theta_d = 90^\circ$ . Преломленный луч оказывается направленным вдоль границы раздела (рис.9.21). При углах падения

$\theta_i > \tilde{\theta}_i$  преломленный свет не выходит в первую среду. Происходит так называемое *полное внутреннее отражение*.

Оценим величину порогового угла  $\tilde{\theta}_i$  для границы стекло-воздух:

$$\sin \tilde{\theta}_i = \frac{1,00}{1,50} = 0,667$$

или

$$\tilde{\theta}_i = 41,8^\circ.$$

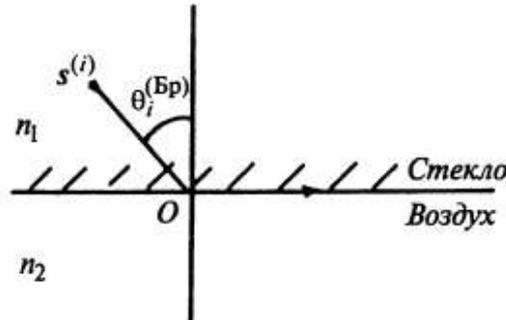


Рисунок 9.21

Однако при полном внутреннем отражении электромагнитное поле во второй среде не равно нулю. Отсутствует поток энергии через границу. Если в фазовом множителе прошедшей волны учесть, что

$$\sin \theta_d = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i,$$

то косинус такого  $\theta_d$  будет мнимым:

$$\cos \theta_d = \pm i \sqrt{\frac{n_1^2 \sin^2 \theta_i}{n_2^2} - 1} = \pm i \frac{n_1}{n_2} \sqrt{\sin^2 \theta_i - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2},$$

поле преломленной волны окажется равным

$$E^{(d)} \sim \exp\left(i\omega\left(t - \frac{x \sin \theta_d}{n_2} \frac{1}{V_1}\right)\right) \exp\left(-\frac{\omega \zeta}{V_1} \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_i - 1}\right).$$

Это выражение описывает неоднородную волну, которая распространяется вдоль границы раздела и меняется экспоненциально с расстоянием  $\zeta$  от этой поверхности. Физический смысл имеет экспонента со знаком “минус”, так как только в этом случае волна затухает от поверхности. Знаку “плюс” соответствовало бы неограниченное возрастание амплитуды поля. Эффективная глубина проникновения поля равна по порядку величины

$$\frac{V_1}{\omega} = \frac{\lambda_1}{2\pi},$$

т.е. имеет порядок величины длины волны. Ослабление поля в глубину происходит не вследствие поглощения волны. Обе среды предполагаются прозрачными. Однако энергия падающего на границу раздела светового потока полностью отражается. Поток энергии, проникающий из первой среды во вторую, равен потоку, идущему в обратном направлении.

Проникновение поля в менее плотную среду наблюдалась в оптической области в опытах Л.И.Мандельштама. Явление возникает на границе между стеклянной призмой и жидкостью, в которой растворено некоторое количество флюоресцирующего вещества. Свет падает на границу стекла и жидкости и испытывает там полное внутреннее отражение, направление падающего и отраженного пучка света показано на рис.9.19. При этом возникает свечение тонкого слоя жидкости у основания стеклянной призмы. Электромагнитная волна, заходящая в жидкость на глубину порядка  $\lambda$ , вызывает в жидкости свечение.

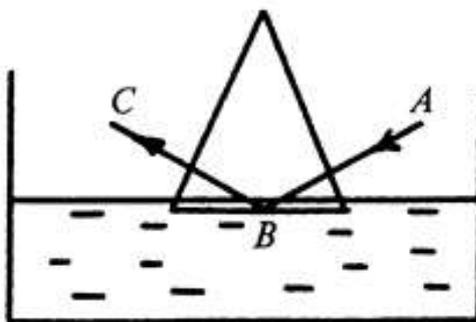


Рисунок 9.20

Явление полного внутреннего отражения нашло важное применение в линиях волоконно-оптической связи. Свет можно направить с одного конца канала, состоящего из пучка тонких стеклянных волокон, на дальний конец. Электромагнитная волна испытывает полное внутреннее отражение на границах волокон, и сигнал выходит на дальнем конце неискаженным. Таким образом можно передавать светящиеся изображения из одной точки пространства в другую.

В телефонной волоконно-оптической линии входной звуковой сигнал преобразуется в закодированные световые импульсы, которые посылаются по волокну. На дальнем конце линии эти импульсы преобразуются обратно в копию входного звукового сигнала. Сегодня земной шар опоясан десятками миллионов оптических волоконных линий для такой телефонной связи.

#### Вопросы для контроля знаний

1. Какие особенности возникают при распространении электромагнитных волн в плазме? Где на практике встречаются такие случаи?
2. Как выглядит выражение для диэлектрической проницаемости в случае распространения электромагнитных волн в плазме?
3. Найдите зависимость диэлектрической проницаемости плазмы от частоты электромагнитной волны.
4. Рассмотрите явление поглощения электромагнитных волн в плазме.
5. Как происходит распространение электромагнитных волн в анизотропных средах? Как изменяется при этом вид материальных уравнений?

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Со времени появления первых гипотез, теорий и экспериментов прошло более трехсот лет. За это время учение об электромагнетизме прошло путь от простейших теорий и экспериментов, от макроскопического уровня изучения явлений до исследования материи на уровне элементарных частиц.

В учебнике акцентируется внимание на то, что электромагнитные явления играют большую роль в науке и технике. Огромные успехи, достигнутые в технологической революции, и особенно в XX столетии, связаны в основном с развитием учения об электромагнетизме, хотя современная физика и учение об электромагнетизме стоят перед целым рядом нерешенных проблем.

В настоящее время с особой силой подчеркивается практическая важность фундаментальных исследований. Это в первую очередь относится к исследованиям в области современной электроэнергетики. Решение стоящих перед ней проблем является важнейшим условием ускорения научно-технического процесса.

Физика является базисом для приобретения новых знаний как в процессе обучения, так и в процессе работы специалиста. Она является общенаучной основой познания электротехники и других технических наук, использующих законы электромагнетизма. Открываемые новые эффекты в области электромагнетизма и новые электротехнические материалы находят техническое применение уже через несколько лет. Это требует определенной гибкости учебного процесса и его совершенствование соответственно темпам развития науки и техники (особенно в организации лекционного курса на базе экономичной затраты времени).

В приложении приводится перечень используемых в работе физических и астрофизических терминов на государственном, русском и английском языках – глоссарий.

## Глоссарий

Аккреция	Аккреция	Accretion
Активные галактические ядра	Белсенді галактикалық ядролар	Active galactic nuclei
Анод	Анод	Anode
Астрономия	Астрономия	Astronomy
Атмосферика	Атмосферика	Atmospherics
Атом	Атом	Atom
Белые карлики	Ақ ергежейлер	White dwarfs
Ближнее ультрафиолетовое излучение	Жақын ультракүлгін сәулелену	Near ultraviolet radiation
Вакуум	Вакуум	Vacuum
Вакуумное ультрафиолетовое излучение	Вакуумды ультракүлгін сәулелену	Vacuum ultraviolet radiation
Взаимодействие	Өзара әсерлесу, өзара әрекеттесу	Interaction
Виртуальные частицы	Виртуалды бөлшектер	Virtual particles
Вихревое магнитное поле	Құйынды магнит өрісі	The vortex magnetic field
Вихревое электрическое поле	Құйынды электр өрісі	The vortex electric field
Вольтов столб	Вольта бағаны	Voltaic pile
Всеволновая астрономия	Тұтас толқындық астрономия	All-wave astronomy
Вселенная	Әлем	Universe
Гальванические токи	Гальваникалық токтар	Galvanic currents
Гидридная техника	Гидридты техника	Hydride technique
Гипотеза	Болжам, жорамал	Hypothesis
Гироскоп	Гироскоп	Gyroscope
Главное квантовое число	Бас квант саны	The principal quantum number
Голубые звезды	Көкшіл жұлдыздар	Blue Star
Гравитационная постоянная	Гравитациялық тұрақты	Gravitational constant
Гравитационное взаимодействие	Гравитациялық өзара әсерлесу	Gravitational interaction
Гравитон	Гравитон	Graviton
Диамагнетизм	Диамагнетизм	Diamagnetism
Диамагнетик	Диамагнетик	Diamagnetic
Диапазон	Диапазон	Range
Диполь	Диполь	Dipole
Дискретность	Дискреттілік	Readability
Дисперсия волн	Толқын дисперсиясы	Dispersion of waves
Диэлектрик	Диэлектрик	Dielectric
Диэлектрические потери	Диэлектрикшілік шығындар	Dielectric loss
Длина волны	Толқын ұзындығы	Wavelength
Дублеты	Дублеттер	Doublets
Закон Кулона	Кулон заңы	Coulomb's Law
Закон сохранения заряда	Зарядтың сақталу заңы	The law of conservation of charge
Заряд	Заряд	Charge
Звезда	Жұлдыз	Star
Импульс	Импульс	Pulse
Инвариантность	Инварианттық	Invariance
Инверсная заселенность энергетических	Энергетикалық деңгейлердің	Population inversion of energy levels

уровней	инверсттік қоныстану	
Индукция магнитного поля	Магнит өрісінің индукциясы	The induction of the magnetic field
Индукция электрического поля	Электр өрісінің индукциясы	The induction electric field
Индукцированное излучение	Индукцияланған сәулелену	Induced radiation
Индукцированное испускание	Индукцияланған шығару	Stimulated emission
Инерциальная система отсчета	Инерциальқ санақ жүйесі	Inertial reference system
Ион	Ион	<u>Ion</u>
Искровой разряд	Ұшқынды разряд	Sparkover
Источник	Көз	A source
Калибровочная инвариантность	Калибрлену инварианттылығы	The gauge invariance
Катод	Катод	Cathode
Квазары	Квазарлар	Quasars
Квантование	Кванттау	Quantization
Квантовая хромодинамика (КХД)	Кванттық хромодинамика (КХД)	Quantum chromodynamics (QCD)
Квантовая электродинамика (КЭД)	Кванттық электродинамика (КЭД)	Quantum electrodynamics (QED)
Кинетическая энергия	Кинетикалық энергия	Kinetic energy
Конденсатор	Конденсатор	Capacitor
Космические лучи	Космостық сәулелер	Cosmic rays
Космическое пространство	Космостық кеңістік	Space
Космос	Космос	Space
Плотность	Тығыздық	Density
Кристаллическая решетка	Кристаллдық тор	Crystal cell
Магнетизм	Магнетизм	Magnetism
Магнетон Бора	Бор магнетоны	Bohr Magneton
Магнит	Магнит	Magnet
Магнитная индукция	Магнит индукциясы	Magnetic induction
Магнитная проницаемость	Магнит өтімділігі	Permeability
Магнитная стрелка	Магнит стрелкасы (жебесі)	Magnetic needle
Магнитное взаимодействие	Магниттік әсерлесу	The magnetic interaction
Магнитное квантовое число	Магниттік кванттық сан	The magnetic quantum number
Магнитное поле	Магнит өрісі	A magnetic field
Масса	Масса	Mass
Материя	Материя	Matter
Межзвездный газ	Жұлдызаралық газ	The interstellar gas
Метагалактика	Метагалактика	Metagalaxy
Метод «холодного пара»	«Салқын бу» әдісі	"Cold steam" method
Механизмы излучения	Сәулелену механизмдері	Mechanisms of radiation
Механический момент	Механикалық момент	Momentum
Модель Большого Взрыва	Үлкен Жаралыс моделі	The model of the Big Bang
Мультиплет	Мультиплет	Multiplet
Мультиплетность	Мультиплеттік	Multiplicity
Намагниченность	Магниттелу	Magnetization
Напряженность магнитного поля	Магнит өрісінің магниттеленуі	The magnetic field strength
Напряженность электрического поля	Электр өрісінің кернеулігі	The electric field strength
Невырожденное состояние	Азғындалған күй	Non-degenerate state

Нейтрон	Нейтрон	Neutron
Нейтронные звезды	Нейтрондық жұлдыздар	Neutron stars
Неподвижный заряд	Қозғалмайтын заряд	Fixed charge
Нерелятивистская физика	Релятивистік емес физика	Non-relativistic physics
Объемные заряды	Көлемді заряд	Volumetric charges
Однородное магнитное поле	Біртекті магнит өрісі	A uniform magnetic field
Окна прозрачности атмосферы	Атмосфераның мөлдірлік терезелері	The windows of atmospheric transparency
Оптическая толщина	Оптикалық қалыңдық	Optical thickness
Оптически тонкая плазма	Оптикалық жұқа плазма	Optically thin plasma
Орбитальное число	Орбиталдық сан	Orbital number
Параллактическая секунда	Паралакстық секунда	Second parallax
Парамагнетизм	Парамагнетизм	Paramagnetism
Парамагнетик	Парамагнетик	Paramagnetic
Перенормировка	Қайта нормировкалау	Renormalization
Пироэлектрик	Пироэлектрик	Pyroelectric
Полупроводники	Жартылай өткізгіш	Semiconductors
Поляризация	Поляризация	Polarization
Постоянная Планка	Планк тұрақтысы	Planck's constant
Потенциал	Потенциал	Potential
Потенциальная энергия	Потенциалдық энергия	Potential energy
Потенциальное поле	Потенциалдық өрісі	Potential field
Прецессия	Прецессия	Precession
Призмы оптические	Оптикалық призма	Optical prisms
Пробой диэлектрика	Диэлектриктің тесілуі	Dielectric breakdown
Проводник	Өткізгіш	Conductor
Пространственное квантование	Кеңістік кванттау	Spatial quantization
Протон	Протон	Proton
Пульсары	Пульсарлар	Pulsars
Пьезоэлектрик	Пьезоэлектрик	Piezoelectric
Радиогалактики	Радиогалактика	Radio galaxies
Радиопульсары	Радиопульсарлар	Radio pulsars
Радиофон Галактики	Галактик Радиофоны	Radiophone Galaxy
Радиоционные пояса	Радиоциялық белдеулер	The radiation belts
Рекомбинационные линии	Рекомбинациялық сызықтар	Recombination line
Реликтовое излучение	Реликті сәулелену	The cosmic microwave background
Релятивистская физика	Релятивисттік физика	Relativistic physics
Сверхновые звезды	Аса жаңа жұлдыздар	Supernovas
Сверхпроводимость	Асқын (төтенше) өткізгіштік	Superconductivity
Сверхтекучесть	Асқан аққыштық	Superfluidity
Сегнетоэлектрики	Сегнетоэлектриктер	Ferroelectrics
Силовые линии поля	Өрістің күш сызықтары	The lines of force of the field
Сильное взаимодействие	Күшті өзара әрекеттесу	Strong interaction
Синглет	Синглет	Singlet
Скорость света	Жарық жылдамдығы	Speed of light
Слабое взаимодействие	Әлсіз өзара әрекеттесу	Weak interaction
Солнечная корона	Күн тәжі	Corona
Спектр	Спектр	Spectrum
Спектральные классы	Спектрлік класстар	Spectral classes
Спектральные линии	Спектрлік сызықтар	Spectral lines
Спектроскопия	Спектроскопия	Spectroscopy
Спин	Спин	Spin
Спин-орбитальное взаимодействие	Спин-орбиталды әсерлесу	The spin-orbit interaction

Телевидение	Телевидение	A television
Температура	Температура	Temperature
Температура Кюри	Кюри температурасы	The Curie temperature
Теория близкодействия	Жақыннан әсерлесу теориясы	The theory of a short-range
Теория дальнодействия	Алыстан әсерлесу теориясы	The theory of action at a distance
Терм	Терм	Term
Термоэлектричество	Термоэлектр	Thermoelectricity
Ток проводимости	Өткізгіштік тогы	Conduction current
Ток смещения	Ығысу тогы	Bias current
Триплет	Триплет	Triplet
Уравнения Максвелла	Максвелл тендеуі	Maxwell's equations
Ферромагнетик	Ферромагнетик	Ferromagnetic material
Физическая картина мира	Әлемнің физикалық көрінісі	The physical picture of the world
Физический эксперимент	Физикалық тәжірибие	Physical experiment
Фотон	Фотон	Photon
Фундаментальные взаимодействия	Іргелі әсерлесу	Fundamental interactions
Центрально-симметричное поле	Центрлік симметриялық өрісі	Centrally symmetric field
Частота колебаний	Тербеліс жиелігі	The oscillation frequency
Эквипотенциальная поверхность	Эквипотенциалды бет	Equipotential surface
Эксперимент	Тәжірибие	Experiment
Экстраполяция	Экстраполяция	Extrapolation
Электрическая цепь	Электр тізбегі	Electrical circuit
Электрический заряд	Электр заряды	Electric charge
Электрический ток	Электр тогы	Electric current
Электрическое поле	Электр өрісі	Electric field
Электричество	Электричество	Electricity
Электродинамика	Электродинамика	Electrodynamics
Электроды	Электродтар	Electrodes
Электролиз	Электролиз	Electrolysis
Электролиты	Электролиттар	Electrolytes
Электромагнитная индукция	Электромагниттік индукция	Electromagnetic induction
Электромагнитное взаимодействие	Электромагниттік әрекеттесу	The electromagnetic interaction
Электромагнитное излучение	Электромагниттік сәуле	Electromagnetic radiation
Электромагнитное поле	Электромагниттік өріс	Electromagnetic field
Электромагнитные волны	Электромагниттік толқын	Electromagnetic waves
Электрон	Электрон	Electron
Электронейтральный	Электр бейтарап	Electroneutrality
Электронная оболочка	Электронды қауақшы	Electron shell
Электронное нейтрино	Электронды нейтрино	The electron neutrino
Электронно-лучевая трубка	Электронды – сәулелік түтік	Cathode-ray tube
Электростатика	Электростатика	Electrostatics
Электротермическая атомизация	Электротермиялық атомизация	Electrothermal atomization
Электрофорная машина	Электрфор машинасы	Electrostatic machine
Эмиссионные линии	Эмиссиялық сызықтар	The emission lines
Энергетическая накачка молекул	Молекулаларды энергетикалық толтыру	Energy pumping molecules
Энергия	Энергия	Energy
Эффект Зеемана	Зееман эффектiсі	Zeeman effect
Ядро атомное	Атом ядросы	The core of the atomic
$\beta$ – распад	$\beta$ – ыдырау	$\beta$ – decay

## Литература

1. ГОСО РК 6.08.066-2010 Утвержден и введен в действие приказом министра образования и науки Республики Казахстан от 03 ноября 2010 г. №514
2. Епифанов Г. И. Физика твердого тела: учебное пособие. 4-е изд., стер. – СПб., 2011. – 288 с.
3. Савельев И.В. Курс общей физики т.5 Квантовая оптика, атомная физика, физика твердого тела, физика атомного ядра и элементарных частиц, – СПб., 2011. - 384с.
4. Бухбиндер И. Л. Статья «Фундаментальные взаимодействия»  
<http://www.modcos.com/articles.php?id=52>
5. Кузьмичева А.Е., Золотарь М.В. Электромагнитное взаимодействие в обучении и в системе фундаментальных взаимодействий // Вестник ЗКГУ: научн. журнал. – 2016. – №4 (64). – с. 147 – 154.
6. Дуйсембаев Б.М., Байжасарова Г.З., Медетбекова А.А. Физика. Учебник для 8 кл. общеобразоват. шк. – 4-е изд., перераб., доп.–Алматы: «Мектеп», 2016. – 288 с.
7. <http://physics.nist.gov/cuu/index.html> Elementary charge. The NIST Reference on Constants, Units, and Uncertainty. US National Institute of Standards and Technology. 2014 CODATA
8. Ландсберг Г.С. Оптика – 6-е изд., стереот. – М.: Физматлит, 2010. – 848 с.
9. Кузьмичева А.Е., Золотарь М.В. Механизмы генерации электромагнитных волн в содержании обучения // Вестник ЗКГУ: научн. журнал. – 2016. – №1 (61). – с. 95 – 103.
10. [http://studopedia.su/7\\_20425\\_diapazoni-elektromagnitnogo-izlucheniya.html](http://studopedia.su/7_20425_diapazoni-elektromagnitnogo-izlucheniya.html)
11. Кузьмичева А.Е., Золотарь М.В. Движение в центрально-симметричном поле. Спин электрона: учебно-методическое пособие – Уральск: РИЦ ЗКГУ им. М.Утемисова, 2015. -93 с.
12. Кузьмичева А.Е., Золотарь М.В. Эффект Зеемана в физической науке и процессе обучения // сборник научных статей магистрантов. –Уральск: РИЦ ЗКГУ им. М.Утемисова, 2016. – с. 83 – 86.
13. Кузьмичева А.Е., Золотарь М.В. Диэлектрики в электрическом поле // сборник матер. респ. науч.– практ. конф. «Махамбетовские чтения – 7»: Уральск: РИЦ ЗКГУ им. М.Утемисова, 2015. – с. 218 – 220.
14. <http://электротехнический-портал.рф/electrotechnicheskiye-materialy/227-sverhprovodniki.html>
15. Гавриленко И.В., Иконников А.В. Квантовый эффект Холла (электронное методическое пособие), Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Национальный исследовательский университет, Нижний Новгород, 2010.
16. [http://ru.wikipedia.org/wiki/Постоянная\\_тонкой\\_структуры](http://ru.wikipedia.org/wiki/Постоянная_тонкой_структуры).

*Объем 29,8 п.л. Тираж 500. Заказ № 2*

---

*Сверстано и отпечатано в редакционно-издательском центре  
Западно-Казахстанского университета им. М. Утемисова  
г. Уральск, пр-т Н.Назарбаева, 162.*